

Modelli reologici

Romano Lapasin



Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Università di Trieste

Approcci fenomenologici e approcci molecolari/microreologici

Problema centrale della reologia:
definizione dell'equazione costitutiva
(relazione tra tensore degli sforzi e uno o più tensori cinematici)



approcci fenomenologici



approcci molecolari o microreologici

Approccio fenomenologico:
l'obiettivo primario è la definizione di un modello capace di descrivere nel modo migliore possibile il comportamento reologico di un sistema prescindendo dalla sua natura e dalle sue condizioni strutturali
(in tempi successivi l'eventuale ricerca delle correlazioni parametri reologici e parametri molecolari o microscopici)

Approccio molecolare o microreologico:
l'obiettivo è la definizione di un modello capace di correlare il comportamento reologico di un sistema con i parametri che ne caratterizzano la struttura su scala molecolare o superiore

Approcci e modelli fenomenologici

Comportamento shear-dipendente

Modello di fluido Newtoniano generalizzato

Comportamento shear- e tempo-dipendente

Approcci tissotropici e approcci viscoelastici

Approccio tissotropico anelastico

Approcci viscoelastici

Modelli viscoelastici lineari

Modelli corotazionali quasi-lineari

Modelli corotazionali non lineari

Modelli codeformazionali

Modello di fluido Newtoniano generalizzato

L'approccio fenomenologico più semplice è basato sulla generalizzazione della relazione valida per fluidi Newtoniani

$$\begin{array}{ccc} \underline{\underline{\tau}} = 2\mu \underline{\underline{D}} & \rightarrow & \underline{\underline{\tau}} = 2\eta(\text{II}_D) \underline{\underline{D}} \\ (\underline{\underline{\tau}} = -\mu \underline{\underline{\dot{\gamma}}}) & & (\underline{\underline{\tau}} = -\eta(\underline{\underline{\dot{\gamma}}}) \underline{\underline{\dot{\gamma}}}) \end{array}$$

La viscosità η è una grandezza scalare che può dipendere soltanto da altre grandezze scalari (componenti del tensore $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$)

$$\text{I}_{\dot{\gamma}} = \sum_i \dot{\gamma}_{ii} \quad \text{II}_{\dot{\gamma}} = \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ji} \quad \text{III}_{\dot{\gamma}} = \sum_i \sum_j \sum_k \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{jk} \dot{\gamma}_{ki}$$

Per un fluido incomprimibile in condizioni di flusso a taglio:

$$\begin{array}{l} \text{I}_{\dot{\gamma}} = 2(\nabla \cdot \underline{\underline{v}}) = 0 \\ \text{III}_{\dot{\gamma}} = 0 \end{array} \quad \dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} \text{II}_{\dot{\gamma}}} \quad \eta = \eta(\dot{\gamma})$$

Modello di fluido Newtoniano generalizzato

equazioni $\eta = \eta(\dot{\gamma})$ differenti



$$\eta = \eta_{\infty} + \frac{\eta_0 - \eta_{\infty}}{1 + (\lambda \dot{\gamma})^m} \quad \eta = k \dot{\gamma}^{n-1}$$

$$\eta = \eta_{\infty} + \frac{\eta_0 - \eta_{\infty}}{(1 + (\lambda \dot{\gamma})^2)^{(1-n)/2}} \quad \eta = \frac{\sigma_0}{\dot{\gamma}} + k \dot{\gamma}^{n-1}$$

.....

modelli adatti a descrivere comportamenti pseudoplastici,
plastici o dilatanti

modelli adatti alla soluzione di problemi riguardanti condizioni stazionarie
di flusso a taglio, quali il calcolo di ΔP nel moto laminare in tubi, o
altre condizioni approssimabili ad esse

non a condizioni non stazionarie e diverse da quelle a taglio

Modello CEF (Criminale - Ericksen - Filbey)

Le diverse versioni del modello di fluido Newtoniano generalizzato possono essere considerati casi particolari di un modello più generale valido per una classe estesa di fluidi

$$\underline{\underline{\tau}} = -\eta \underline{\underline{\dot{\gamma}}} - \left(\frac{1}{2} \psi_1 + \psi_2 \right) \left\{ \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \cdot \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \right\} + \frac{1}{2} \psi_1 \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \underline{\underline{\dot{\gamma}}}$$

η, ψ_1, ψ_2 funzioni di $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$

$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}$: derivata di Jaumann o derivata corotazionale rispetto al tempo

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \underline{\underline{\dot{\gamma}}} = \frac{\partial \underline{\underline{\dot{\gamma}}}}{\partial t} + \{ \underline{\underline{v}} \cdot \nabla \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \} + \frac{1}{2} \left(\{ \underline{\underline{\omega}} \cdot \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \} - \{ \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \cdot \underline{\underline{\omega}} \} \right)$$

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \underline{\underline{\dot{\gamma}}} = \frac{D}{Dt} \underline{\underline{\dot{\gamma}}} + \frac{1}{2} \left(\{ \underline{\underline{\omega}} \cdot \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \} - \{ \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \cdot \underline{\underline{\omega}} \} \right)$$

Omettendo i termini contenenti ψ_1 e ψ_2 , dall'equazione CEF si ricava il modello di fluido Newtoniano generalizzato

dal modello CEF al modello di fluido Newtoniano generalizzato

condizioni di flusso a taglio stazionario tra piani paralleli

$$\nabla_{\underline{v}} = \dot{\gamma} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \nabla_{\underline{v}}^T = \dot{\gamma} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\dot{\gamma}} = \dot{\gamma} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \underline{\underline{\omega}} = \dot{\gamma} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left\{ \underline{\dot{\gamma}} \cdot \underline{\dot{\gamma}} \right\} = \dot{\gamma}^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \left\{ \underline{\underline{\omega}} \cdot \underline{\dot{\gamma}} \right\} = - \left\{ \underline{\dot{\gamma}} \cdot \underline{\underline{\omega}} \right\} = \dot{\gamma}^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \underline{\dot{\gamma}} = \frac{1}{2} \left(\left\{ \underline{\underline{\omega}} \cdot \underline{\dot{\gamma}} \right\} - \left\{ \underline{\dot{\gamma}} \cdot \underline{\underline{\omega}} \right\} \right) = \dot{\gamma}^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\eta \dot{\gamma} \quad \tau_{xx} - \tau_{yy} = -\psi_1 \dot{\gamma}^2 \quad \tau_{yy} - \tau_{zz} = -\psi_2 \dot{\gamma}^2$$

Approcci tissotropici e viscoelastici

I modelli di fluido Newtoniano generalizzato sono inadatti all'analisi del comportamento tempo-dipendente di fluidi non Newtoniani

Occorre disporre di un modello in grado di tener conto della 'memoria' che il fluido ha della storia cinematica precedente, ovvero degli effetti che essa produce sulla struttura del fluido.

Approcci tissotropici	anelastici
	elastici
Approcci viscoelastici	lineari
	non lineari

Negli approcci tissotropici anelastici (o elastici) la tempo-dipendenza è dovuta soltanto (o principalmente) alle variazioni strutturali prodotte da variazioni delle condizioni di campo (sforzi, gradienti di velocità) alle quali è sottoposto il sistema.

Approccio fenomenologico al comportamento tissotropico anelastico (Cheng-Evans)

Il comportamento viscoso shear- e tempo-dipendente in condizioni di flusso di taglio è descritto da :

$$\begin{cases} \tau = f(\lambda, \dot{\gamma}) & \text{equazione di stato} \\ \frac{d\lambda}{dt} = g(\lambda, \dot{\gamma}) & \text{equazione cinetica} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \lambda: \text{parametro strutturale} \\ \text{arbitrario} \\ 0 \leq \lambda \leq 1 \end{array}$$

Esempio di modello adatto a descrivere il comportamento tissotropico di sospensioni di caolino e argilla

$$\begin{aligned} \tau = f(\lambda, \dot{\gamma}) &= \tau_0(\lambda) + K(\lambda)\dot{\gamma}^n & \tau_0 &= \tau_{0,0} + (\tau_{0,1} - \tau_{0,0})\lambda \\ \frac{d\lambda}{dt} = g(\lambda, \dot{\gamma}) &= k_d(1-\lambda)^p - k_i(\dot{\gamma})\lambda^q & K &= K_0 + (K_1 - K_0)\lambda \end{aligned}$$

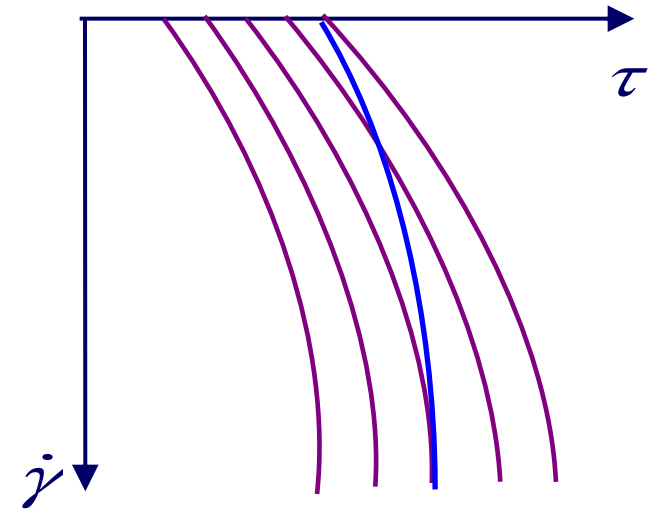
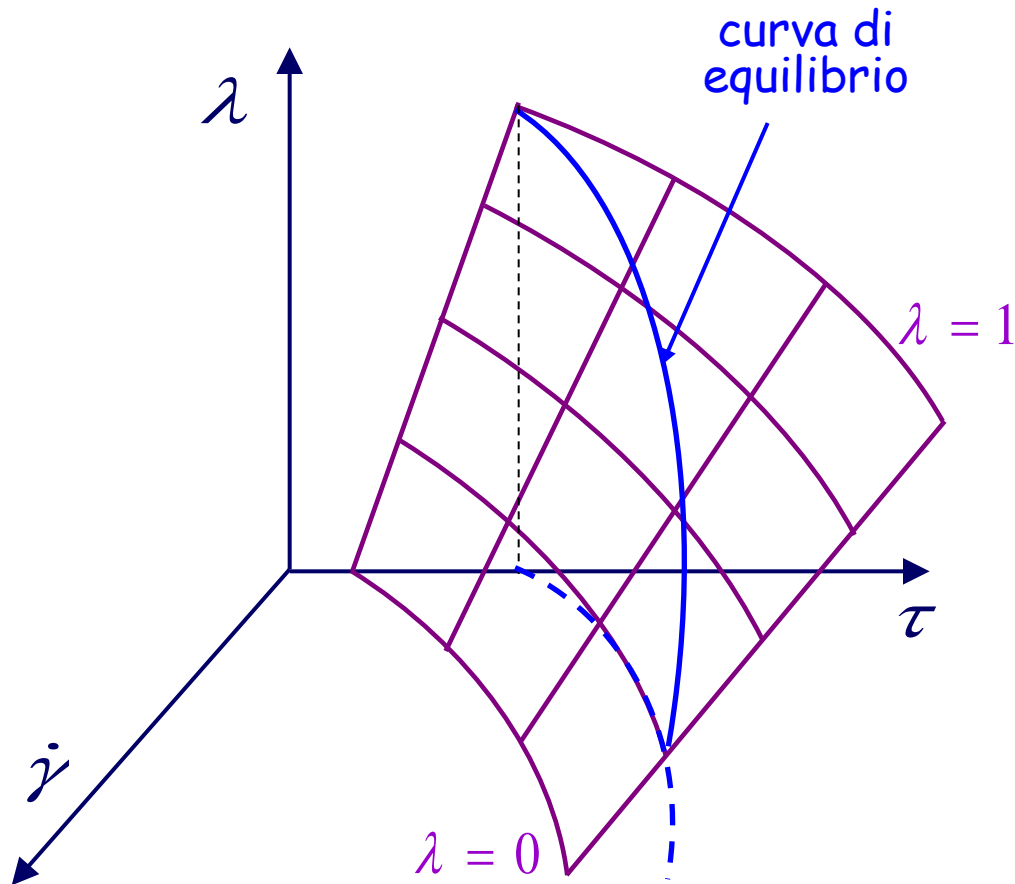
in condizioni stazionarie (di equilibrio)

$$\begin{cases} k_i = b\dot{\gamma} \\ p = q = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{d\lambda}{dt} = 0 = k_d(1-\lambda) - b\dot{\gamma}\lambda$$

$$\lambda_{eq} = \frac{k_d}{k_d + b\dot{\gamma}} \quad \begin{array}{ll} \lambda_{eq} \rightarrow 1 & \text{per } \dot{\gamma} \rightarrow 0 \\ \lambda_{eq} \rightarrow 0 & \text{per } \dot{\gamma} \rightarrow \infty \end{array}$$

Approccio fenomenologico al comportamento tissotropico anelastico (Cheng-Evans)

$$\tau = f(\lambda, \dot{\gamma}) \quad \text{equazione di stato}$$



mappa di curve $\tau(\dot{\gamma})$
a λ costante

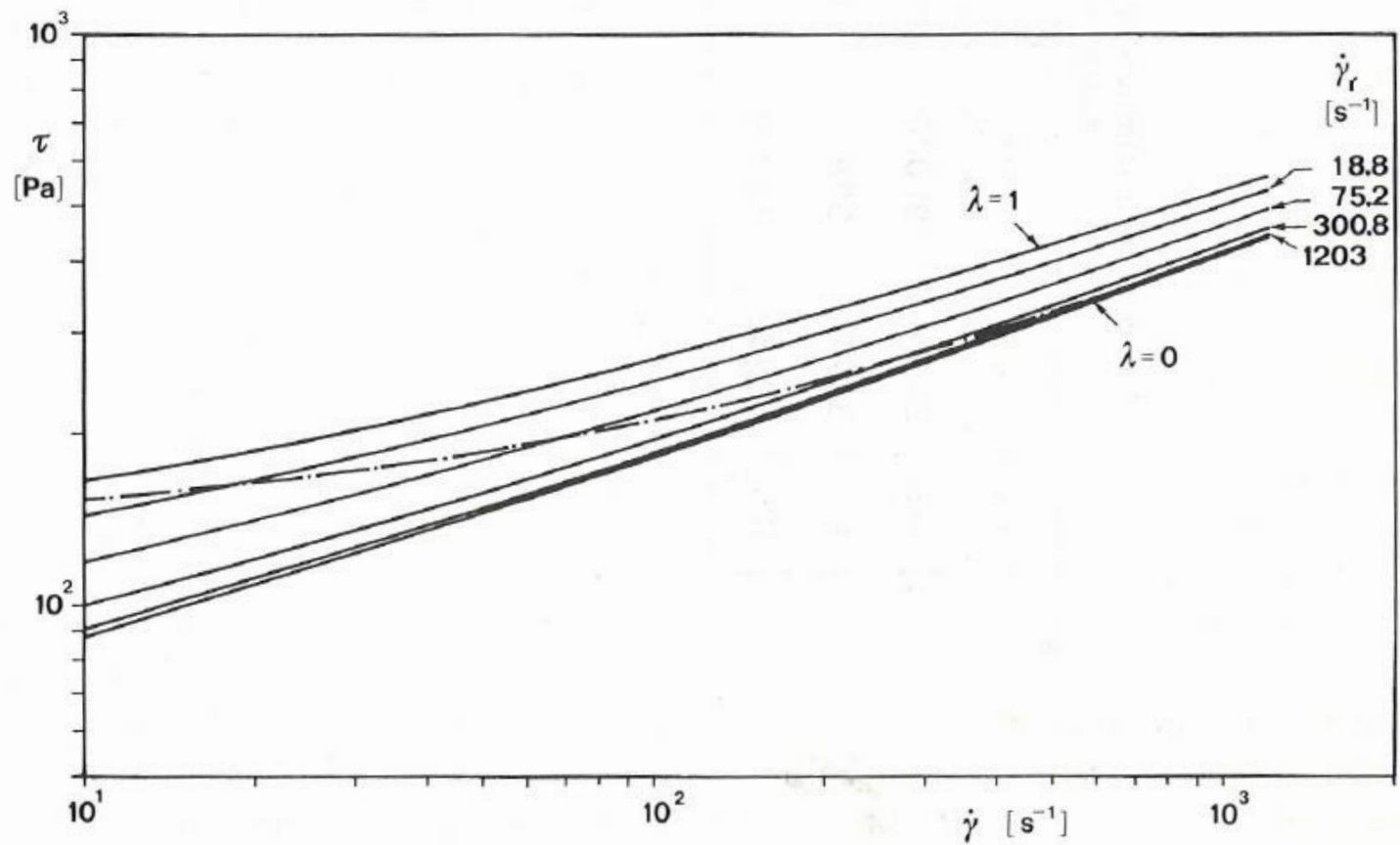


FIGURE 3 Shear stress vs. shear rate curves map at constant λ for the system at $c_d = .375$.

Clay-kaolin suspensions
A. Alessandrini, R. Lapasin, F. Sturzi, Chem. Eng. Commun., 1982

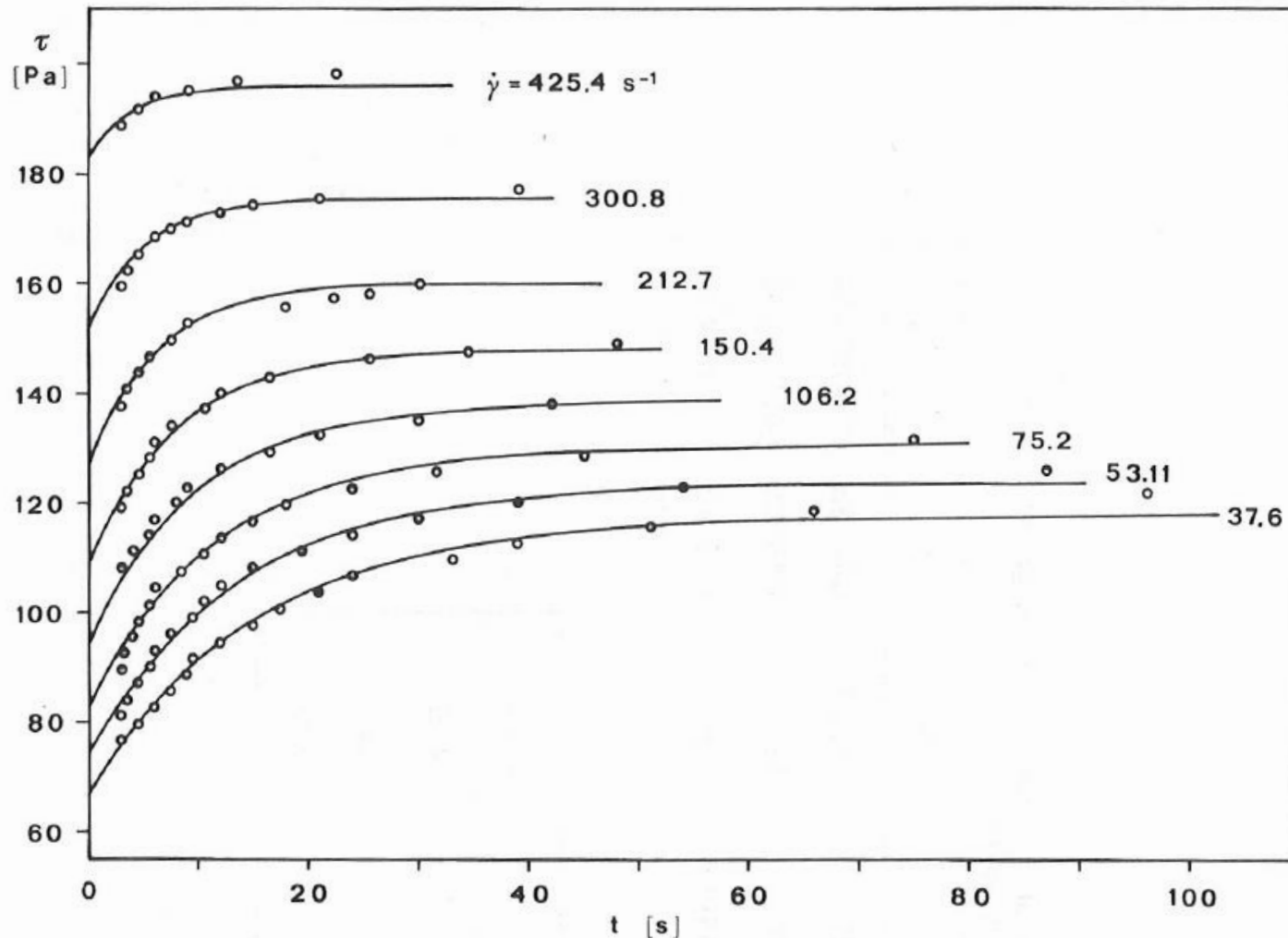


FIGURE 2 Comparison between the experimental τ values and the calculated curves for the system at $c_d = .4$ ($\dot{\gamma}_r = 601.6 \text{ s}^{-1}$).

Modelli viscoelastici lineari

modello di Maxwell

$$\tau + \lambda \frac{\partial \tau}{\partial t} = \eta \dot{\gamma}$$



in condizioni stazionarie

$$\tau = \eta \dot{\gamma} \quad \text{comportamento Newtoniano}$$



per rapide variazioni di τ

$$\lambda \frac{\partial \tau}{\partial t} \cong \eta \dot{\gamma}$$

$$\tau = (\eta / \lambda) \gamma = G \gamma$$



a deformazione costante

$$\tau + \lambda \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0$$

$$\tau = \tau_{in} \exp(-t / \lambda)$$

versioni tensoriali:

$$\tau_{ij} + \lambda \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = \eta \dot{\gamma}_{ij}$$

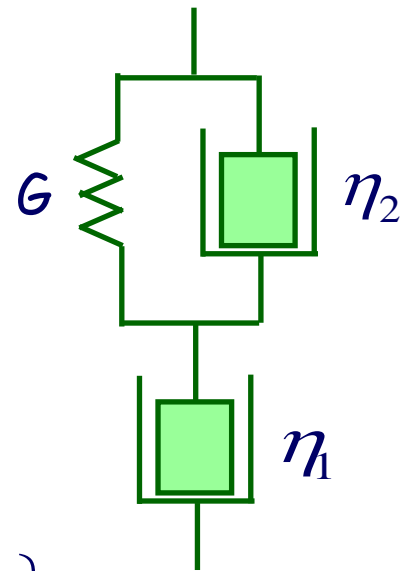
$$\tau_{ij} = - \int_{-\infty}^t G(t-t') \dot{\gamma}_{ij}(t') dt' = - \int_{-\infty}^t \left\{ \frac{\eta}{\lambda} \exp\left(-\frac{t-t'}{\lambda}\right) \right\} \dot{\gamma}_{ij}(t') dt'$$

$$\tau_{ij} = \int_{-\infty}^t \left\{ \frac{\eta}{\lambda^2} \exp\left(-\frac{t-t'}{\lambda}\right) \right\} \gamma_{ij}(t') dt'$$

Modelli viscoelastici lineari

modello di Jeffreys

$$\tau_{ij} + \lambda_1 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = \eta_1 \left(\dot{\gamma}_{ij} + \lambda_2 \frac{\partial \dot{\gamma}_{ij}}{\partial t} \right) \quad \lambda_1 = \eta_1 / G$$
$$\lambda_2 = \eta_2 / G$$



$$\tau_{ij} = - \int_{-\infty}^t \left\{ \frac{\eta_1}{\lambda_1} \left[\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \exp\left(- \frac{t-t'}{\lambda} \right) + 2\lambda_2 \delta(t-t') \right] \right\} \dot{\gamma}_{ij}(t') dt'$$

$$\tau_{ij} = \int_{-\infty}^t \left\{ \frac{\eta_1}{\lambda_1} \left[\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \exp\left(- \frac{t-t'}{\lambda} \right) + 2\lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \delta(t-t') \right] \right\} \gamma_{ij}(t') dt'$$

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n/\pi} \exp(-nx^2) \quad \text{funzione delta di Dirac}$$

modello di Jeffreys: punto di partenza
per lo sviluppo di modelli viscoelastici non lineari

Modelli viscoelastici lineari

modello di Burgers
(modello di Maxwell + modello di Voigt-Kelvin)

creep $\tau = \tau_0$ per $0 \leq t \leq t_0$

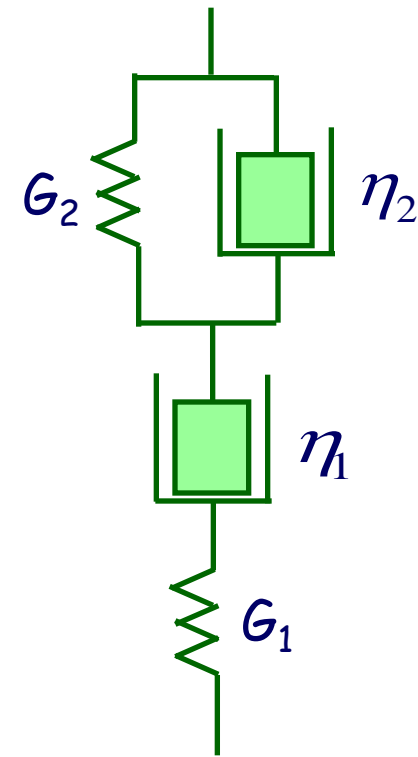
$$\gamma = \frac{\tau_0}{G_1} + \frac{\tau_0 t}{\eta_1} + \frac{\tau_0}{G_2} \left(1 - \exp\left(-\frac{G_2 t}{\eta_2}\right) \right)$$

recovery $\tau = 0$ per $t_0 \leq t'$

$$\gamma = \frac{\tau_0 t_0}{\eta_1} + \frac{\tau_0}{G_2} \left(1 - \exp\left(-\frac{G_2 t_0}{\eta_2}\right) \right) \exp\left(-\frac{G_2 (t' - t_0)}{\eta_2}\right)$$

rilassamento a deformazione costante $\gamma = \gamma_0$ per $0 \leq t$

$$\tau = \gamma_0 G_1 \exp\left(-\frac{G_1 t}{\eta_1}\right) + \gamma_0 G_2$$



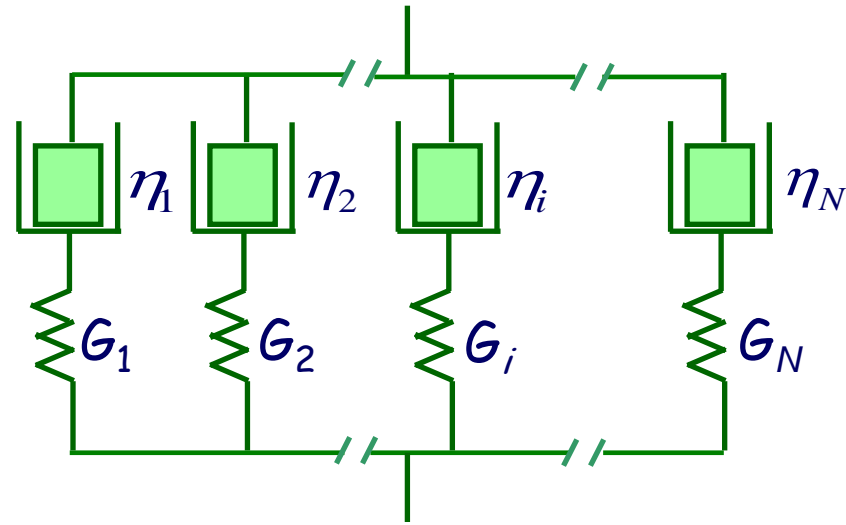
Modelli viscoelastici lineari

modello di Maxwell generalizzato

$$G(t) = G \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right)$$



$$G(t) = \sum_i G_i \exp\left(-\frac{t}{\lambda_i}\right) \quad \lambda_k = \frac{\eta_k}{G_k}$$



$$\tau_{ij} = - \int_{-\infty}^t \left\{ \sum_i G_i \exp\left(-\frac{t-t'}{\lambda_i}\right) \right\} \dot{\gamma}_{ij}(t') dt'$$



spettro meccanico

$$G' = \sum_{i=1}^N \frac{G_i \omega^2 \lambda_i^2}{1 + \omega^2 \lambda_i^2} \quad G'' = \sum_{i=1}^N \frac{G_i \omega \lambda_i}{1 + \omega^2 \lambda_i^2}$$



spettro dei tempi
di rilassamento

$$G_i(\lambda_i)$$

G_i, λ_i : valori da fitting, problematiche di fitting e criteri di vincolo (scaling), scaling teorici

Modelli viscoelastici lineari

modello di Maxwell generalizzato

metodi differenti di regressione dei dati sperimentali
e di regolarizzazione

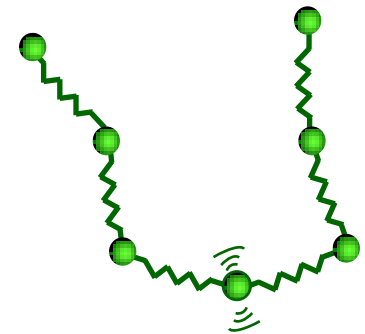
criterio empirico di scaling dei tempi: $\lambda_i = 10 \lambda_{i-1}$



riduzione del grado di correlazione tra i parametri di fitting
riduzione del numero di parametri aggiustabili

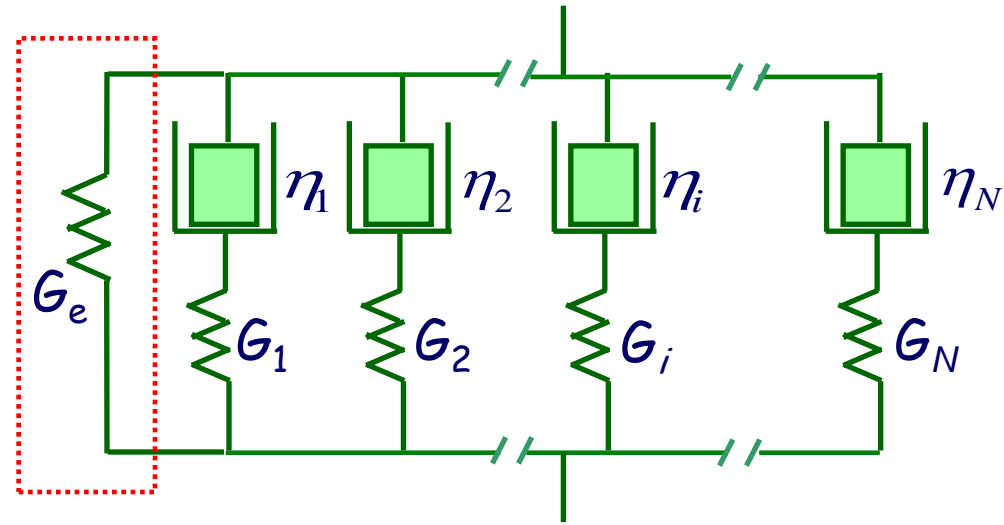
criteri di scaling basati su approcci teorici:
teoria di Rouse per soluzioni polimeriche e
fusi a basso peso molecolare

$$\lambda_k = \frac{\lambda_1}{k^\alpha} \quad (\alpha = 2) \quad \eta_k = G_k \lambda_k = \frac{\eta_0 \lambda_k}{\sum_k \lambda_k}$$



Modelli viscoelastici lineari

modello di Maxwell generalizzato:
implementazione per estenderne
l'applicazione a comportamenti
solid-like



$$G(t) = G_e + \sum_i G_i \exp\left(-\frac{t}{\lambda_i}\right)$$

$$G(t) \rightarrow G_e \quad \text{per } t \rightarrow \infty$$

$$\tau_{ij} = - \int_{-\infty}^t \left\{ G_e + \sum_i G_i \exp\left(-\frac{t-t'}{\lambda_i}\right) \right\} \dot{\gamma}_{ij}(t') dt'$$



spettro meccanico

$$G' = G_e + \sum_{i=1}^N \frac{G_i \omega^2 \lambda_i^2}{1 + \omega^2 \lambda_i^2} \quad G'' = \sum_{i=1}^N \frac{G_i \omega \lambda_i}{1 + \omega^2 \lambda_i^2} \quad \Rightarrow \quad G' \rightarrow G_e \quad \text{per } \omega \rightarrow 0$$

Modelli viscoelastici a derivate frazionarie

Modelli viscoelastici basati sull'uso di derivate frazionarie
(operatori matematici integrodifferenziali)
al posto di funzioni e derivate intere di funzioni

definizione di derivata frazionaria secondo Riemann - Liouville

$$D^\alpha [f(t)] = \frac{d^\alpha f(t)}{d t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d t} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau$$

$$\Gamma(1-\alpha) = \int_0^\infty \exp(-x) x^{-\alpha} dx \quad \text{funzione gamma}$$

idea originaria di Scott Blair:

comportamenti viscoelastici compresi tra due estremi

corpo elastico

$$\tau = G\gamma = \frac{d^0 \gamma(t)}{d t^0}$$

corpo

viscoelastico

τ funzione di γ

corpo viscoso

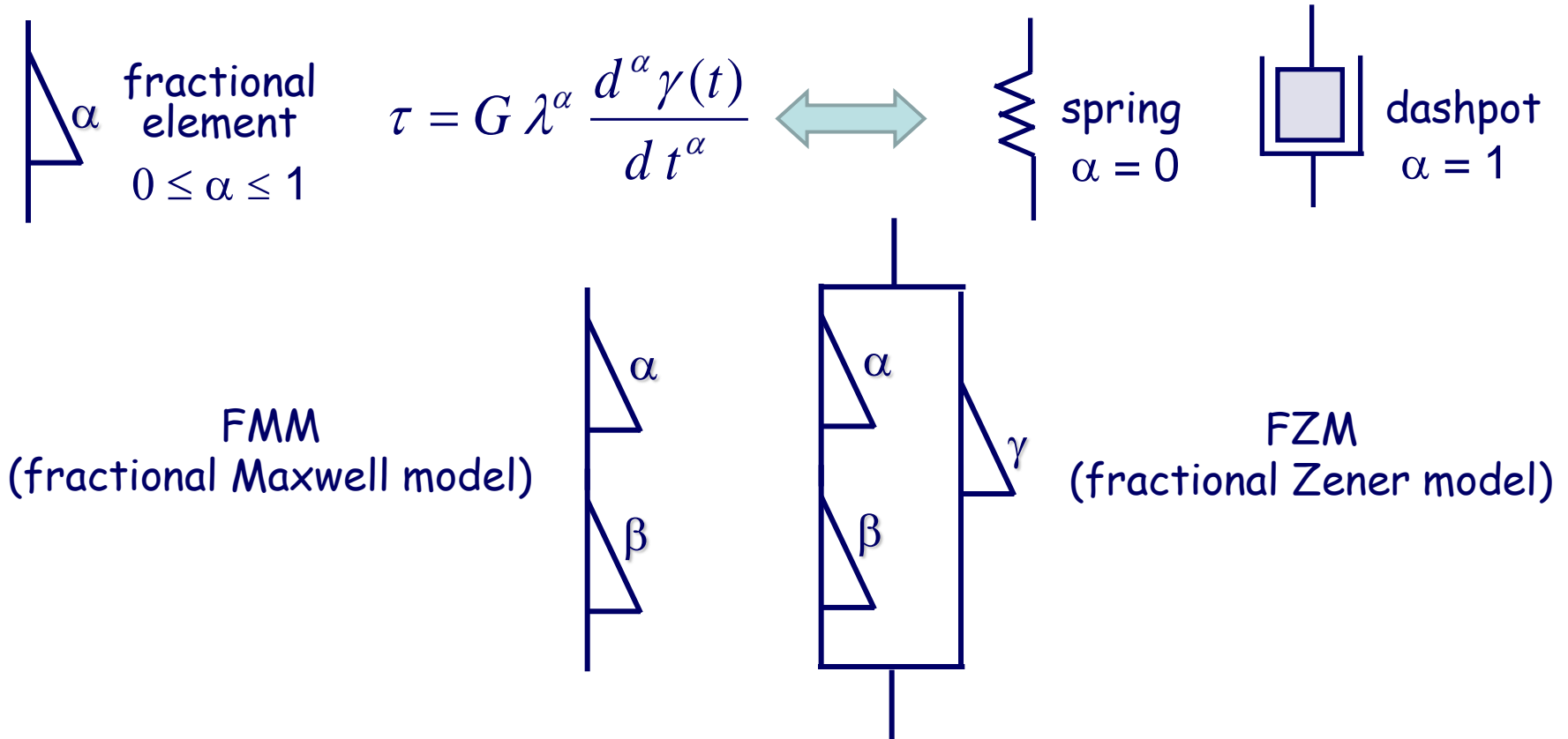
$$\tau = \eta \dot{\gamma} = \frac{d^1 \gamma(t)}{d t^1}$$

attraverso operatore matematico

intermedio tra funzione e derivata prima

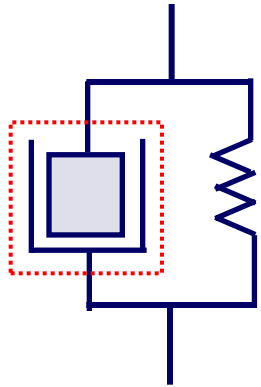
Modelli viscoelastici a derivate frazionarie

modifica di modelli convenzionali
(sostituzione di elementi elastico e viscoso con elementi frazionari)



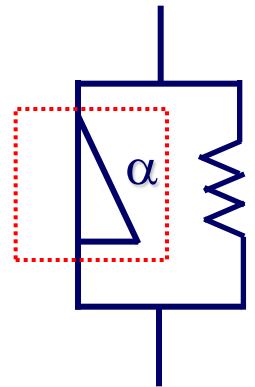
modifica delle equazioni costitutive dei modelli convenzionali
(sostituzione con derivate frazionarie)

Modelli viscoelastici a derivate frazionarie



$$\tau(t) = G_0 \cdot \gamma(t) + \eta \cdot D^1[\gamma(t)]$$

$$\tau(t) = G_0 \cdot \gamma(t) + G_1 \lambda^\alpha \cdot D^\alpha[\gamma(t)]$$



Modello di Friedrich

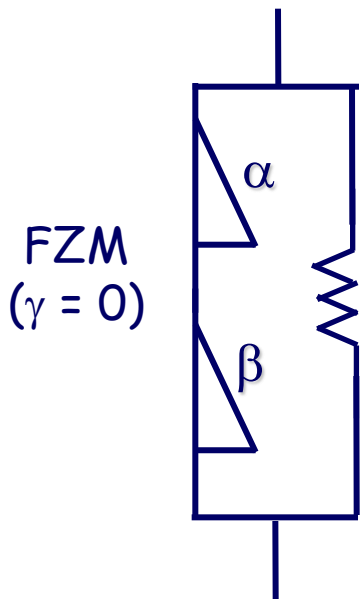
$$\bar{\tau} + \lambda^c D^c[\bar{\tau}] = G_e \{D^0[\bar{\gamma}] + \lambda^c D^c[\bar{\gamma}]\} + \Delta G \lambda^d D^d[\bar{\gamma}]$$

(d = \alpha, c = \alpha - \beta)

spettro meccanico

$$G'(\omega) = G_e + \Delta G \frac{(\lambda\omega)^d \left[\cos(d \frac{\pi}{2}) + (\lambda\omega)^c \cos((d-c) \frac{\pi}{2}) \right]}{1 + 2(\lambda\omega)^c \cos(c \frac{\pi}{2}) + (\lambda\omega)^{2c}}$$

$$G''(\omega) = \Delta G \frac{(\lambda\omega)^d \left[\sin(d \frac{\pi}{2}) + (\lambda\omega)^c \sin((d-c) \frac{\pi}{2}) \right]}{1 + 2(\lambda\omega)^c \cos(c \frac{\pi}{2}) + (\lambda\omega)^{2c}}$$



Modelli viscoelastici a derivate frazionarie

Modello di Friedrich

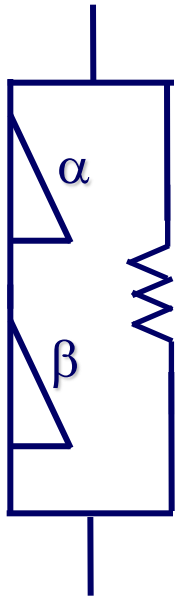
$$\bar{\tau} + \lambda^c D^c [\bar{\tau}] = G_e \{ D^0 [\bar{\gamma}] + \lambda^c D^c [\bar{\gamma}] \} + \Delta G \lambda^d D^d [\bar{\gamma}]$$

$$(d = \alpha, c = \alpha - \beta)$$



Modello di Maxwell $(\alpha=1, \beta=0, G_e=0)$ $(d = 1, c = 1)$

FZM
($\gamma = 0$)

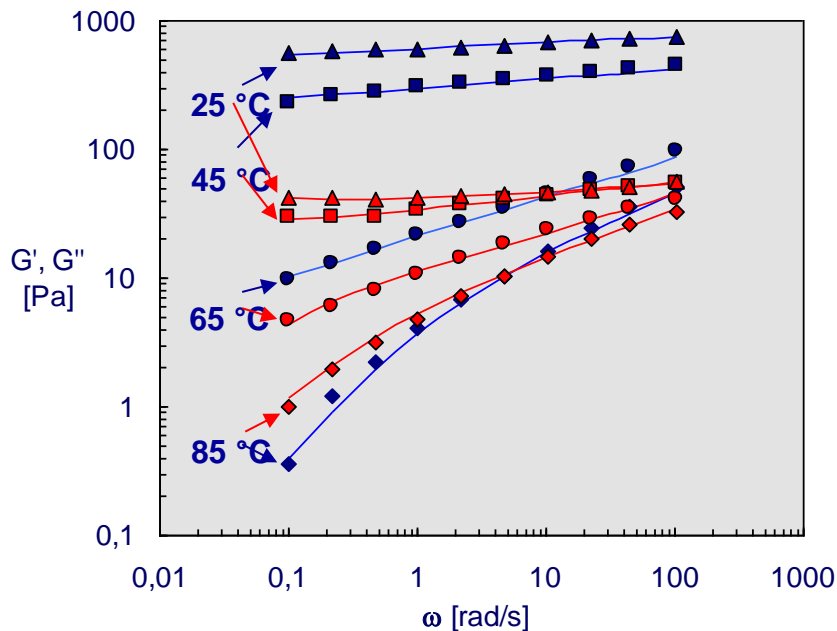


$$G'(\omega) = \Delta G \frac{(\lambda\omega)^2}{1 + (\lambda\omega)^2}$$

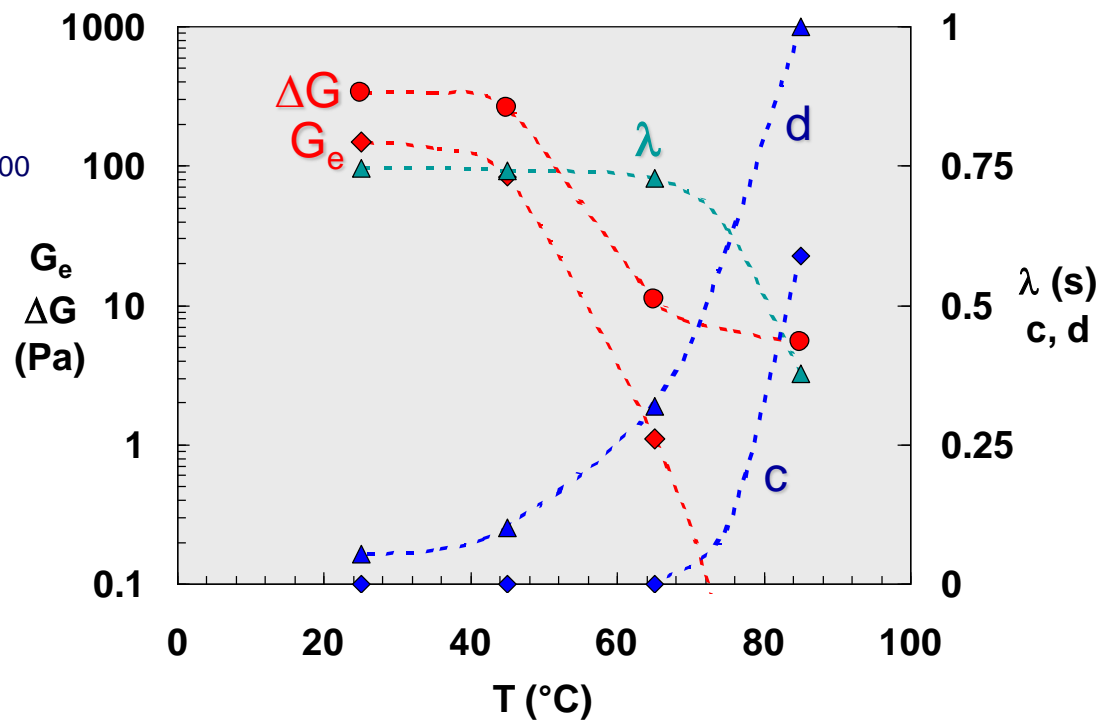
$$G''(\omega) = \Delta G \frac{(\lambda\omega)}{1 + (\lambda\omega)^2}$$

Modelli viscoelastici a derivate frazionarie

descrizione della transizione sol/gel attraverso il modello di Friedrich



xanthan-locust bean gum (1:1)
KCl 20mM, 1%
25 - 85 °C



Modelli viscoelastici a derivate frazionarie

spettro meccanico di un polimero associativo

Macromolecules **1995**, 28, 6284–6295

Dynamic Viscoelastic Modulus of Associative Polymer Networks: Off-Lattice Simulations, Theory and Comparison to Experiments

Robert D. Groot* and Wim G. M. Agterof

Unilever Research Laboratorium, P.O. Box 114, 3130 AC Vlaardingen, The Netherlands

Received December 28, 1994; Revised Manuscript Received May 25, 1995[®]

ABSTRACT: An off-lattice simulation model for associative polymer gels as introduced recently (Groot, R. D.; Agterof, W. G. M. *J. Chem. Phys.* **1994**, 100, 1649) has been applied to obtain the mechanical spectrum as a function of frequency and polymer concentration, using a Green–Kubo relation for the time-dependent modulus. Two stages of relaxation are observable in our simulations. The early-time decay is consistent with a $-2/3$ power law, whose form is insensitive to large variations in polymer concentration, association lifetime, and degree of association. The late stage, which relaxes like the end-to-end vector in the Rouse model, has a characteristic stress that scales as the cube of the concentration and a relaxation time that is proportional to the monomer–monomer dissociation rate. The simulation results have been compared with experiments found in the literature for several physical gels. The quantitative agreement calls into question other postulated mechanisms involving hydrodynamic interaction or reptation, since the simulation contains neither of these features. As an alternative explanation for the observed early-time decay, an explicit relation between the power law exponent and the polymer fractal dimension is given.

Modelli viscoelastici a derivate frazionarie

spettro meccanico di un polimero associativo

Macromolecules **1995**, *28*, 6284–6295

Dynamic Viscoelastic Modulus of Associative Polymer Networks:
Off-Lattice Simulations, Theory and Comparison to Experiments

Robert D. Groot* and Wim G. M. Agterof

Unilever Research Laboratorium, P.O. Box 114, 3130 AC Vlaardingen, The Netherlands

Received December 28, 1994; Revised Manuscript Received May 25, 1995

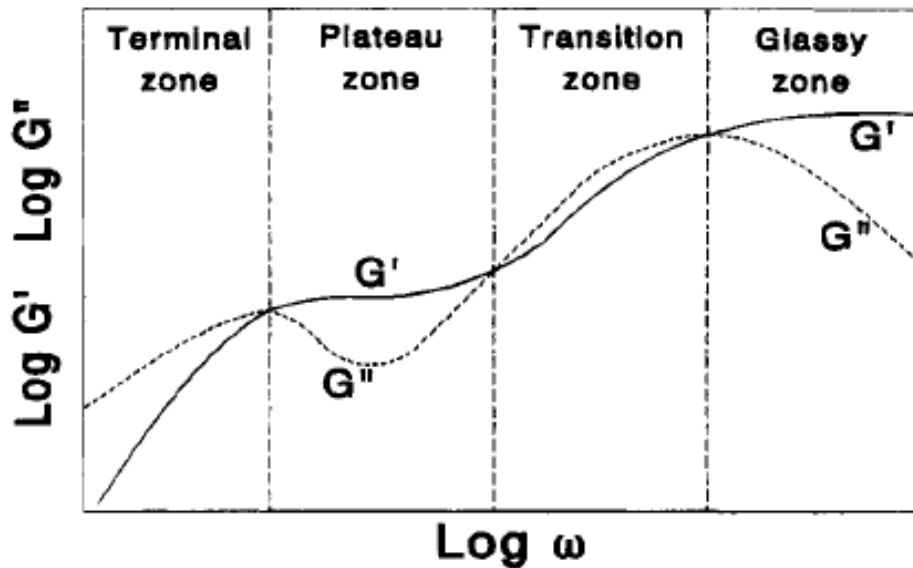
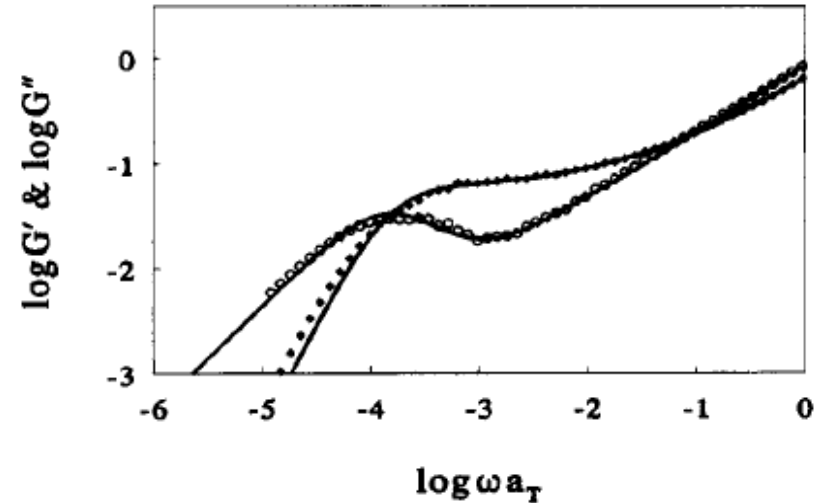
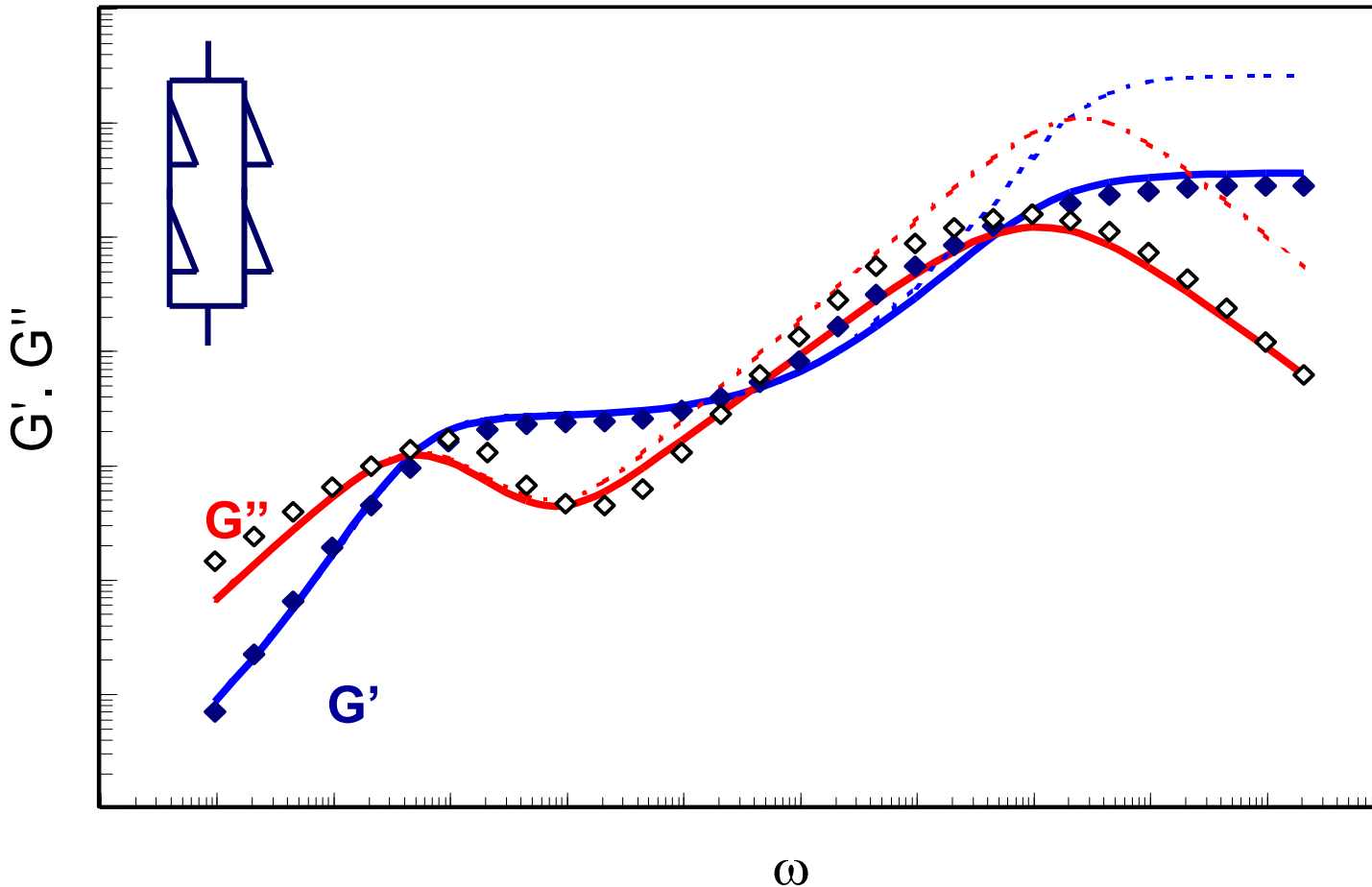


Figure 1. Schematic pattern of the complex modulus as a function of the frequency.



Modelli viscoelastici a derivate frazionarie

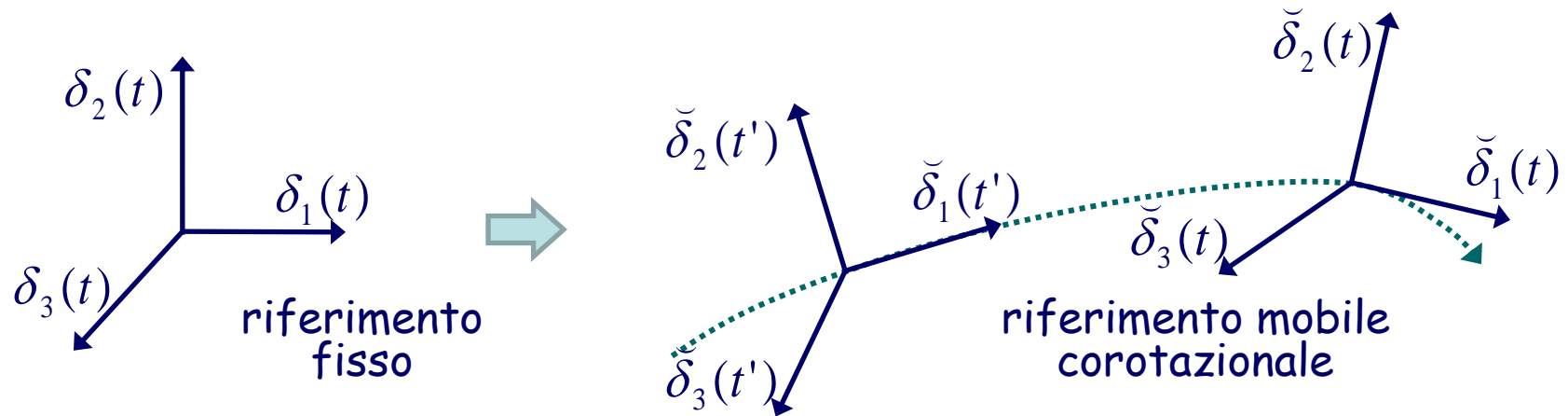
spettro meccanico di un polimero associativo
descrizione con modello 2FMM



data from R.D. Groot, W.G.M. Agterof, *Macromolecules*, 1995, 28, 6284-6295

Modelli viscoelastici corotazionali

Modelli viscoelastici lineari riformulati scambiando il sistema fisso di coordinate con un sistema corotazionale



riformulazione del modello di Jeffreys

<p>riferimento fisso</p> <p>↓</p> <p>riferimento mobile corotazionale</p>	<p>↓</p>	$\tau_{ij} + \lambda_1 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = \eta_1 \left(\dot{\gamma}_{ij} + \lambda_2 \frac{\partial \dot{\gamma}_{ij}}{\partial t} \right)$ $\check{\tau}_{ij} + \lambda_1 \frac{\partial \check{\tau}_{ij}}{\partial t} = \eta_1 \left(\check{\dot{\gamma}}_{ij} + \lambda_2 \frac{\partial \check{\dot{\gamma}}_{ij}}{\partial t} \right)$	<p>modello lineare</p> <p>modello lineare</p>
---	----------	---	---

Modelli viscoelastici corotazionali

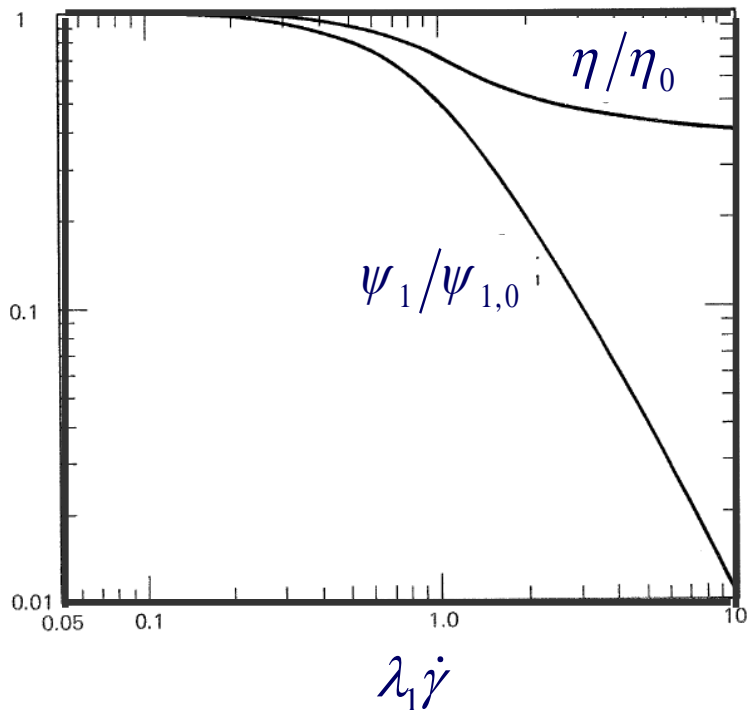
riscrittura del modello di Jeffreys nel sistema fisso

$$\frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \quad \tau_{ij} + \lambda_1 \frac{\mathcal{D}\tau_{ij}}{\mathcal{D}t} = \eta_1 \left(\dot{\gamma}_{ij} + \lambda_2 \frac{\mathcal{D}\dot{\gamma}_{ij}}{\mathcal{D}t} \right)$$

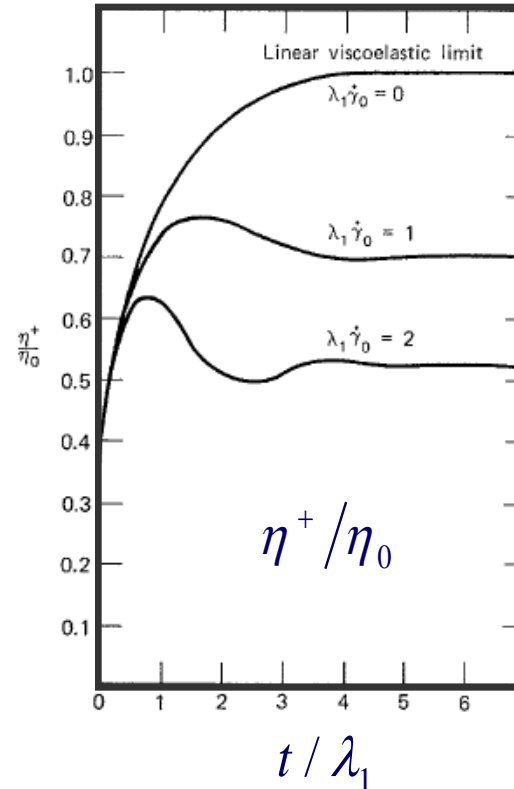
modello non lineare

modello corotazionale di Jeffreys

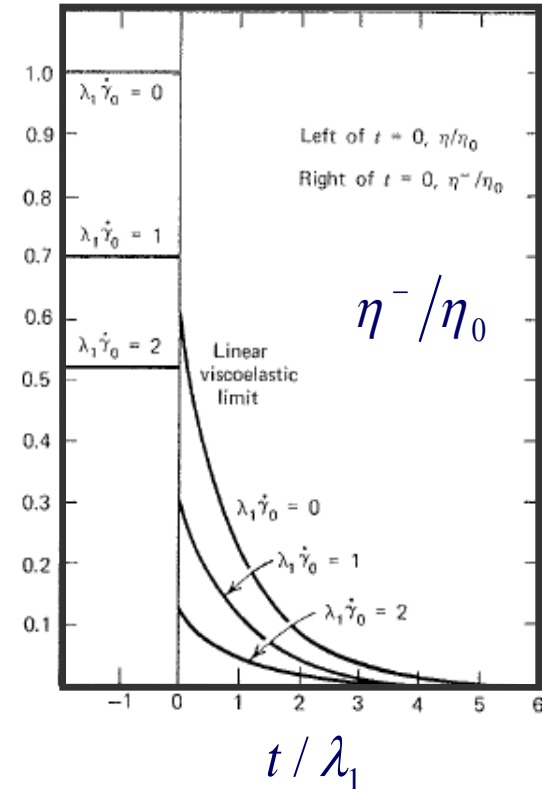
flusso di taglio stazionario



avviamento



spegnimento



Modelli viscoelastici corotazionali non lineari

per aggiunta di termini non lineari

dal modello di Jeffreys corotazionale

$$\check{\tau}_{ij} + \lambda_1 \frac{\partial \check{\tau}_{ij}}{\partial t} = \eta_1 \left(\check{\dot{\gamma}}_{ij} + \lambda_2 \frac{\partial \check{\dot{\gamma}}_{ij}}{\partial t} + \left[\check{\dot{\gamma}}_{ij} \cdot \check{\dot{\gamma}}_{kl} \right] \right)$$



riscrittura nel
sistema fisso

al modello di Oldroyd (8 costanti)

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_0 \frac{1 + \left[\lambda_1 \lambda_2 + \mu_0 \left(\mu_2 - \frac{3}{2} \nu_2 \right) - \mu_1 (\mu_2 - \nu_2) \right] \dot{\gamma}^2}{1 + \left[\lambda_1^2 + \mu_0 \left(\mu_1 - \frac{3}{2} \nu_1 \right) - \mu_1 (\mu_1 - \nu_1) \right] \dot{\gamma}^2}$$

$$\psi_1(\dot{\gamma}) = 2 [\eta_1(\dot{\gamma}) - \eta_0 \lambda_2]$$

$$\psi_2(\dot{\gamma}) = -\frac{\psi_1(\dot{\gamma})}{2} + [\mu_1 \eta_1(\dot{\gamma}) - \mu_2 \eta_0]$$

$$\eta_E(\dot{\epsilon}) = 3\eta_0 \frac{1 - \mu_2 \dot{\epsilon} + \left[\left(\frac{3}{2} \mu_0 - \mu_1 \right) (2\mu_2 - 3\nu_2) \right] \dot{\epsilon}^2}{1 - \mu_1 \dot{\epsilon} + \left[\left(\frac{3}{2} \mu_0 - \mu_1 \right) (2\mu_1 - 3\nu_1) \right] \dot{\epsilon}^2}$$

percorsi di sviluppo dei modelli

fluido Newtoniano

linearità tra τ e $\dot{\gamma}$

combinazione di due elementi lineari

fluido Newtoniano generalizzato

modello di Maxwell

trascurando i termini contenenti gli sforzi normali

combinazione di più elementi lineari

modello viscoelastico lineare generalizzato

reformulazione in sistema corotazionale

equazione CEF

modelli corotazionali quasi lineari

stato stazionario

aggiunta di termini non lineari

modelli corotazionali non lineari

percorsi di sviluppo dei modelli

fluido Newtoniano

fluido Newtoniano generalizzato

modello di Maxwell

modello di Jeffreys

equazione CEF

modello di Jeffreys
corotazionale

modelli corotazionali
di Oldroyd

Equazioni per la descrizione del comportamento macroscopico: flusso in tubi

$$Q = \frac{\pi R^3}{\tau_w^3} \int_0^{\tau_w} \tau_{rz}^2 f(\tau_{rz}) d\tau_{rz}$$



power law

$$\tau_{rz} = m \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^n$$

$$Q = \pi R^2 \langle v_z \rangle = \pi \frac{n}{3n+1} \left(-\frac{\Delta \wp}{2mL} \right)^{1/n} R^{(3n+1)/n}$$

Bingham model

$$\tau_{rz} = \tau_0 + \eta_p \left(-\frac{dv_z}{dr} \right) \quad \tau_{rz} \geq \tau_0 \quad r_p \leq r \leq R$$

$$\phi = \frac{\tau_0}{\tau_w} \quad \tau_w = -\frac{\Delta \wp}{L} \frac{R}{2}$$

$$\frac{dv_z}{dr} = 0 \quad 0 \leq r \leq r_p$$

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta_p} \left(-\frac{\Delta \wp}{L} \right) \left(1 - \frac{4}{3}\phi + \frac{1}{3}\phi^2 \right)$$

Herschel-Bulkley fluid

$$\tau_{rz} = \tau_0 + m \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^n \quad \tau_{rz} \geq \tau_0 \quad r_p \leq r \leq R$$

$$\frac{dv_z}{dr} = 0 \quad 0 \leq r \leq r_p \quad Q = \pi R^3 n \left(\frac{\tau_w}{m} \right)^{1/n} (1-\phi)^{(n+1)/n} \left\{ \frac{(1-\phi)^2}{3n+1} + \frac{2\phi(1-\phi)}{2n+1} + \frac{\phi^2}{n+1} \right\}$$