Grandezze significative (dinamiche e cinematiche)

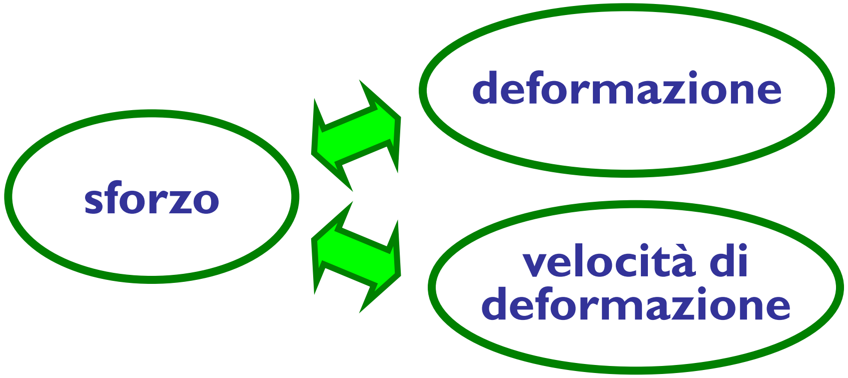
Romano Lapasin

Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Università di Trieste

Obiettivo generale

definire un'equazione costitutiva adatta a descrivere
il comportamento meccanico del sistema materiale
in una qualunque condizione di campo

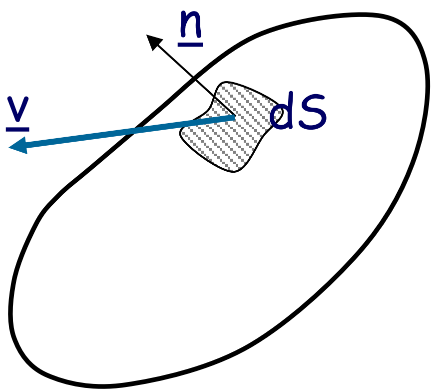
legame tra sforzi interni e stato di deformazione
e/o condizioni di flusso in ogni punto del sistema



dall'equazione costitutiva si ricavano le funzioni materiali
e i parametri materiali utili a definire le risposte
in semplici condizioni di deformazione o di flusso

Equazioni di variazione

bilancio di materia



$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \, dV = -\int_S \left[\underline{n} \bullet \rho \underline{v}\right] dS$$

accumulo — termine convettivo

$$\int_V \frac{d}{dt}\rho \, dV = -\int_V \left[\underline{\nabla} \bullet \rho \underline{v}\right] dV$$

$$\frac{d}{dt}\rho = -\underline{\nabla} \bullet \rho \, \underline{v}$$

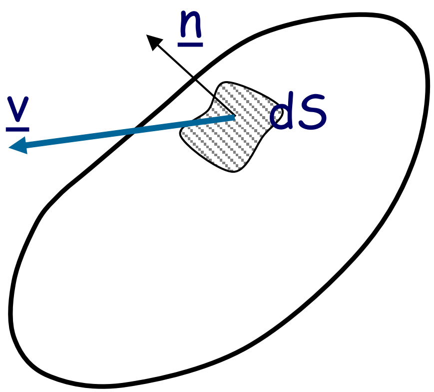
per fluidi incomprimibili $\underline{\nabla} \bullet \underline{v} = 0$

vincolo su componenti del gradiente di velocità

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Equazione del moto ed equazione costitutiva

dal bilancio di quantità di moto



$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \underline{v}\, dV = -\int_S \left[\underline{n}\bullet \rho \underline{v}\,\underline{v}\right] dS - \int_S \left[\underline{n}\bullet \underline{\underline{\sigma}}\right] dS + \int_V \rho\, \underline{g}\, dV$$

accumulo | termine convettivo | termine diffusivo | forze di volume

$$\int_V \frac{d}{dt}\rho \underline{v}\, dV = -\int_V \left[\underline{\nabla}\bullet \rho \underline{v}\,\underline{v}\right] dV - \int_V \left[\underline{\nabla}\bullet \underline{\underline{\sigma}}\right] dV + \int_V \rho\, \underline{g}\, dV$$

$$\frac{d}{dt}\rho \underline{v} = -\underline{\nabla}\bullet \rho \underline{v}\,\underline{v} - \underline{\nabla}\bullet \underline{\underline{\sigma}} + \rho\, \underline{g}$$

equazione del moto

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = -\underline{\nabla}\bullet \underline{\underline{\sigma}} + \rho\, \underline{g}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\tau}}$$

equazione costitutiva per necessaria per la risoluzione $\underline{v}(x_i)$

Equazione costitutiva ed equazione del moto

equazione costitutiva: legge di Newton

$$\boxed{\underline{\underline{\tau}} = -\mu\left(\nabla \underline{v} + \left(\nabla \underline{v}\right)^T\right)} + \left(\frac{2}{3}\mu - \kappa\right)\left(\nabla \bullet \underline{v}\right)\underline{\underline{\delta}}$$

$\Downarrow$

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{v} + \rho\, g$$

equazione del moto di Navier-Stokes

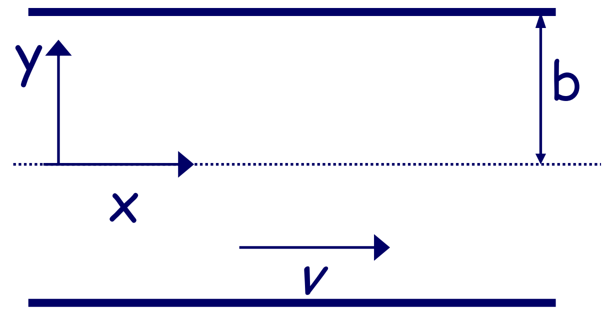
altra equazione costitutiva (fluidi non Newtoniani)

$\Downarrow$

equazione del moto equivalente a Navier-Stokes

Flusso di un liquido Newtoniano tra piani paralleli in stato stazionario

piani infinitamente estesi, orizzontali
liquido incomprimibile
pressione applicata (gradiente secondo x)



$$0 = -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{v}$$

soluzione postulata:

$$v_z = 0 \quad v_y = 0 \quad v_x = v_x(y)$$

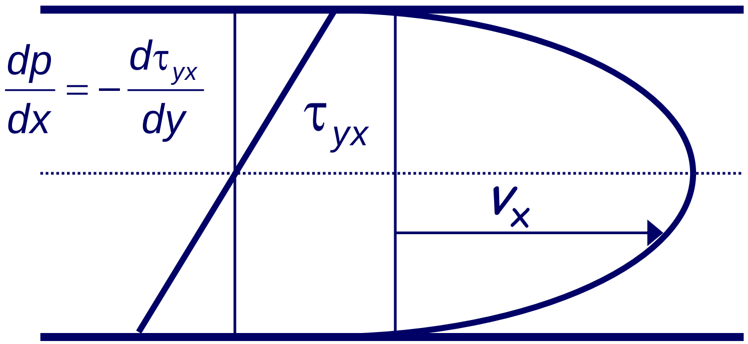
dalla componente dell'equazione del moto secondo x:

$$\mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = \frac{dp}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_x}{dy} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} y + C_1 \quad \Rightarrow \quad v_x = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2$$

dalle condizioni al contorno ($v_x = 0 \quad per\ y = b,\ y = -b$)

$$v_x = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(y^2 - b^2\right)$$

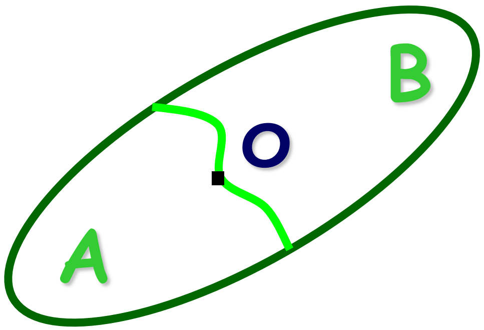
$$Q = W \int_{-b}^{b} v_x dy = \frac{2}{3\mu}\frac{dp}{dx} b^3$$

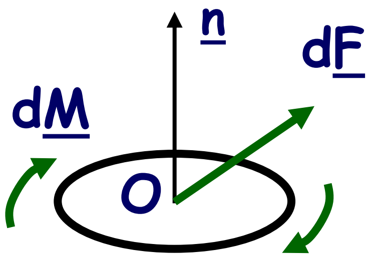


versante dinamico

stato di tensione nel punto O

divisione del corpo in due parti secondo
una superficie passante per O (normale $\underline{n}$)





interazioni tra le due parti A e B
espresse attraverso d$\underline{F}$ e d$\underline{M}$

$$\frac{d\,\underline{M}}{dA} \xrightarrow[dA \to 0]{} 0 \qquad \frac{d\,\underline{F}}{dA} \xrightarrow[dA \to 0]{} \underline{t}$$

tensione $\underline{t} = f\,(O, \underline{n})$

tensione in O
in condizione idrostatica

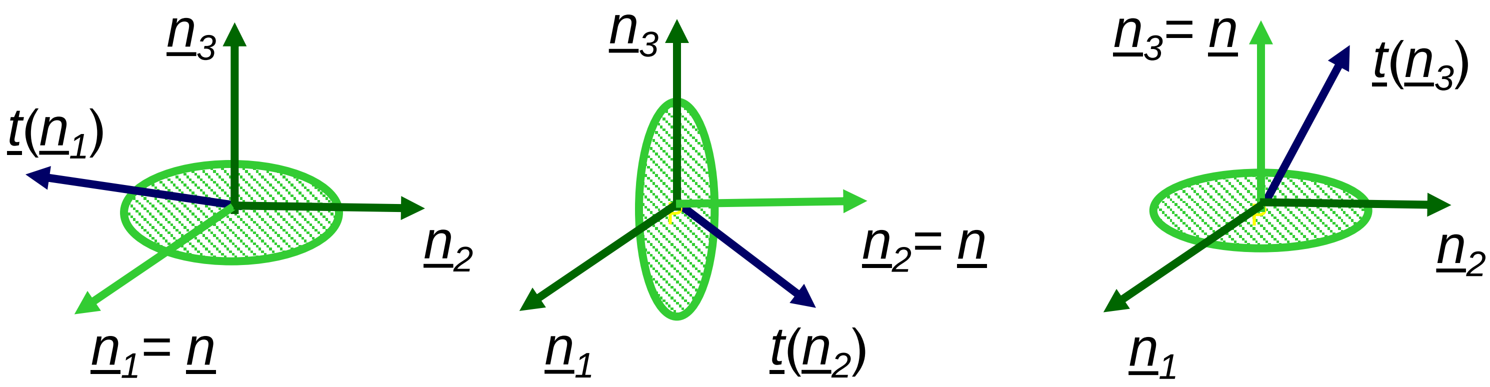
$$\underline{t} = -p\underline{n}$$

versante dinamico

dalla tensione al tensore degli sforzi

la tensione relativa alla generica normale n può essere definita a partire da quelle relative a tre direzioni

$$\underline{t}(\underline{n}_1) = t_1(\underline{n}_1)\,\underline{n}_1 + t_2(\underline{n}_1)\,\underline{n}_2 + t_3(\underline{n}_1)\,\underline{n}_3$$
$$\underline{t}(\underline{n}_2) = t_1(\underline{n}_2)\,\underline{n}_1 + t_2(\underline{n}_2)\,\underline{n}_2 + t_3(\underline{n}_2)\,\underline{n}_3$$
$$\underline{t}(\underline{n}_3) = t_1(\underline{n}_3)\,\underline{n}_1 + t_2(\underline{n}_3)\,\underline{n}_2 + t_3(\underline{n}_3)\,\underline{n}_3$$



$\underline{t}(\underline{n}_1),\ \underline{t}(\underline{n}_2),\ \underline{t}(\underline{n}_3)$ ⇨ **tensore degli sforzi**

versante dinamico

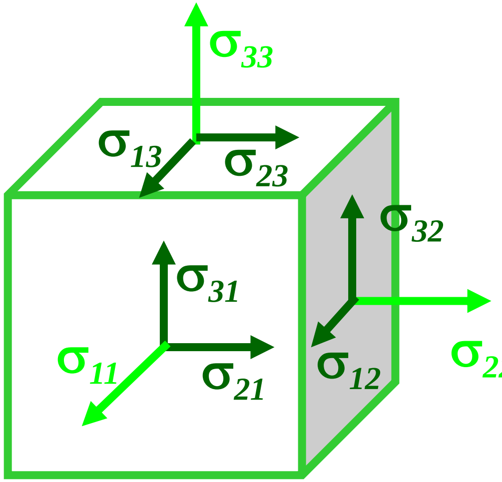
dal tensore degli sforzi alla tensione in un punto

componente della tensione ⇨ componente del tensore degli sforzi

$$t_j(\underline{n}_i) = \sigma_{ji} \qquad i, j = 1,2,3$$

tensore (totale) degli sforzi

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$



$\sigma_{ji}\ (j = i)$: sforzi normali

$\sigma_{ji}\ (j \neq i)$: sforzi tangenziali

la tensione nel punto O: $\underline{t} = f(O, \underline{n}) = \underline{n} \bullet \underline{\underline{\sigma}}(O)$

versante dinamico

tensore deviatorico degli sforzi τ

da condizione idrostatica a condizioni di flusso/deformazioni

$$\underline{t} = -p\underline{n} \quad \Rightarrow \quad \underline{t} = \underline{n} \bullet \underline{\underline{\sigma}}$$

il contributo (extra) delle condizioni di flusso/deformazioni allo stato di tensione è espresso dal tensore deviatorico $\underline{\underline{\tau}}$

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\tau}}$$

tensore deviatorico degli sforzi (extra stress tensor)

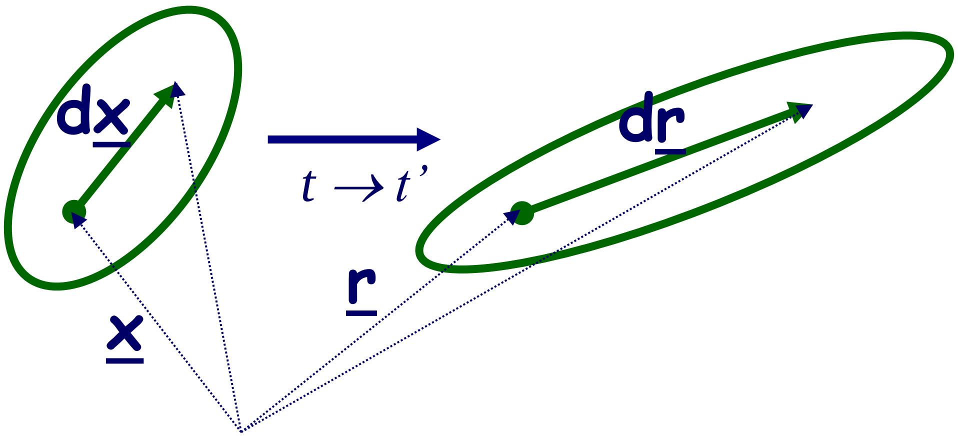
$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} + p & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} + p & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} + p \end{vmatrix}$$

$\underline{\underline{\tau}}$ **è un tensore simmetrico**

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

versante cinematico

cambiamento della configurazione nel tempo (da t a t')



$$d\underline{r} = \underline{\underline{F}}\, d\underline{x} \qquad F_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial x_j}$$

$$\underline{\underline{F}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x_1} & \frac{\partial r_1}{\partial x_2} & \frac{\partial r_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial r_2}{\partial x_1} & \frac{\partial r_2}{\partial x_2} & \frac{\partial r_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial r_3}{\partial x_1} & \frac{\partial r_3}{\partial x_2} & \frac{\partial r_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

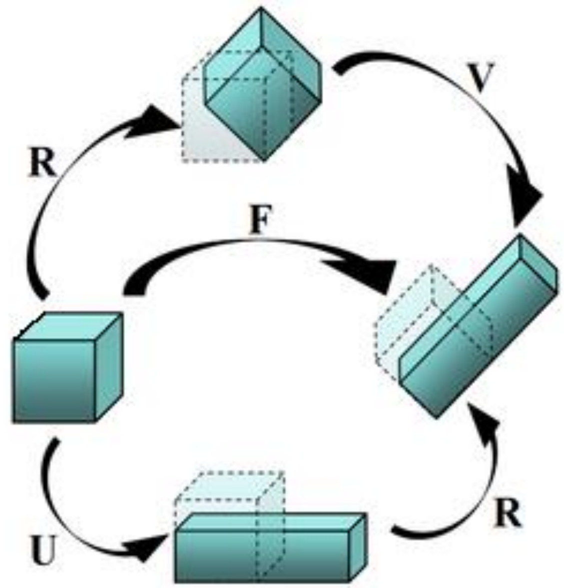
$\underline{\underline{F}}$: **tensore gradiente di deformazione (o tensore di deformazione)**

condizione indeformata $\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\delta}}$

rotazione $\Leftrightarrow$ $\det \underline{\underline{F}} = 1$

necessità di separare deformazione da moto di corpo rigido

versante cinematico



il tensore F è scomponibile nel prodotto di un tensore simmetrico definito positivo per un tensore ortogonale *(decomposizione polare sinistra)*

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{V}} \bullet \underline{\underline{R}}$$

(deformazione pura • rotazione)

$\underline{\underline{V}}$: simmetrico

$$\underline{\underline{V}}^T = \underline{\underline{V}}$$

$\underline{\underline{R}}$: ortogonale

$$\underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{R}}^{-1}$$

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}} \bullet \underline{\underline{F}}^T = \left(\underline{\underline{V}} \bullet \underline{\underline{R}}\right) \bullet \left(\underline{\underline{V}} \bullet \underline{\underline{R}}\right)^T = \underline{\underline{V}} \bullet \underline{\underline{R}} \bullet \underline{\underline{R}}^T \bullet \underline{\underline{V}}^T = \underline{\underline{V}} \bullet \underline{\underline{V}}^T = \underline{\underline{V}}^2$$

B: tensore di Finger

misura (quadratica) della sola deformazione

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \bullet \underline{\underline{F}}$$

C: tensore di Cauchy-Green

....

grandezze cinematiche e equazioni costitutive

tensore di Cauchy-Green, di Finger e altri correlati utili per la descrizione del comportamento di solidi elastici

(esiste una configurazione di riferimento)

Solidi elastici

Lo sforzo è funzione univoca del tensore di Cauchy-Green misurato a partire dalla configurazione di riferimento

$$\underline{\underline{\tau}} = \Im\left(\underline{\underline{C}}\right)$$

elasticità lineare ($per \;\; \underline{\underline{C}} \to 0$ **):** $\quad \Im\left(\underline{\underline{C}}\right) \to E\,\underline{\underline{C}}$

in assenza di una configurazione di riferimento

⇓

necessità di altri tensori per la descrizione del comportamento di fluidi viscosi

versante cinematico

tensore velocità di deformazione $\underline{\underline{D}}$ per la descrizione del comportamento di fluidi viscosi

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}\left(\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T\right) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T\right)$$

(Bird's school)

$$\underline{\underline{\dot{\gamma}}} = \nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T = 2\underline{\underline{D}}$$

rate of strain tensor → velocità di deformazione in un punto

$$\underline{\underline{\omega}} = \nabla \underline{v} - (\nabla \underline{v})^T$$

vorticity tensor → velocità di rotazione in un punto

$\underline{\underline{\dot{\gamma}}}\ (\underline{\underline{D}})$: tensore simmetrico → 2° invariante: grandezza scalare utile a caratterizzare l'intensità del moto

$$II_{\dot{\gamma}} = \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}\dot{\gamma}_{ji} \longrightarrow \dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} II_{\dot{\gamma}}}$$

grandezze cinematiche e equazioni costitutive

il tensore velocità di deformazione $\underline{\underline{D}}(\underline{\underline{\dot{\gamma}}})$ serve alla descrizione del comportamento di fluidi viscosi

(non esiste una configurazione di riferimento)

Fluidi viscosi

Lo sforzo è funzione univoca del tensore $\underline{\underline{D}}$ valutato al tempo corrente

$$\underline{\underline{\tau}} = \Im(\underline{\underline{D}})$$

Fluido Newtoniano

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\mu\,\underline{\underline{D}} \qquad \left(\underline{\underline{\tau}} = -\mu\,\underline{\underline{\dot{\gamma}}}\right)$$

Fluido Euleriano

$$\underline{\underline{\tau}} = 0 \quad (\mu = 0)$$

Fluido Newtoniano generalizzato

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\eta(II_D)\,\underline{\underline{D}} \qquad \left(\underline{\underline{\tau}} = -\eta(\dot{\gamma})\,\underline{\underline{\dot{\gamma}}}\right)$$

grandezze cinematiche e equazioni costitutive

il tensore di Cauchy $\underline{\underline{C}}$ (funzione del tempo) serve alla descrizione del comportamento di sistemi viscoelastici

Corpi viscoelastici

Lo sforzo è determinato in maniera univoca dal tensore di Cauchy $\underline{\underline{C}}$ il cui valore dipende dal tempo

$$\underline{\underline{\tau}}(t) = \Im\left(\underline{\underline{C}}(t')\right)$$

ed è computato fino al tempo corrente t per tener conto della storia di deformazione precedente

(il funzionale $\Im$ è, di norma, espresso da un'integrale)

grandezze cinematiche e equazioni costitutive

Comportamento viscoelastico lineare (in condizioni di piccole deformazioni)

$$\underline{\underline{\tau}}(t) = \int_{-\infty}^{t} E(t')\,\underline{\underline{C}}(t')\;dt'$$

$$E(t') = E\;f(t-t')$$

$$f(t-t') = \int_{0}^{\infty} a(\lambda)\exp\left[-\frac{t-t'}{\lambda}\right]d\lambda$$

$$\underline{\underline{\tau}}(t) = \int_{-\infty}^{t} E\left(\int_{0}^{\infty} a(\lambda)\exp\left[-\frac{t-t'}{\lambda}\right]d\lambda\right)C(t')\,dt'$$

equazione costitutiva della viscoelasticità lineare

grandezze cinematiche e equazioni costitutive

altre espressioni del modello viscoelastico lineare in forma generalizzata

$$\underline{\underline{\sigma}} = -\int_{-\infty}^{t} G(t-t')\,\underline{\underline{\dot{\gamma}}}(t')\,dt'$$

G(t-t') modulo di rilassamento (*relaxation modulus*)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \int_{-\infty}^{t} M(t-t')\,\underline{\underline{\gamma}}(t')\,dt'$$

M(t-t') funzione di memoria (*memory function*)

$$M(t) = -\frac{d\,G(t)}{d\,t}$$

equazioni costitutive
principi generali per la loro definizione

1. Principio di oggettività materiale

   uso di grandezze significative per caratterizzare
   lo stato di tensione e di deformazione
   indifferenti a traslazioni, rotazioni e al sistema
   di riferimento

2. Principio deterministico

   Il tensore degli sforzi dipende dalla storia reologica
   (stati di deformazione precedenti e presente)

3. Principio di azione locale

   Il tensore degli sforzi in un punto dipende dalle forze
   agenti nell'intorno del punto

Un esempio d'uso del tensore di Finger: modello neo-Hookiano

Romano Lapasin

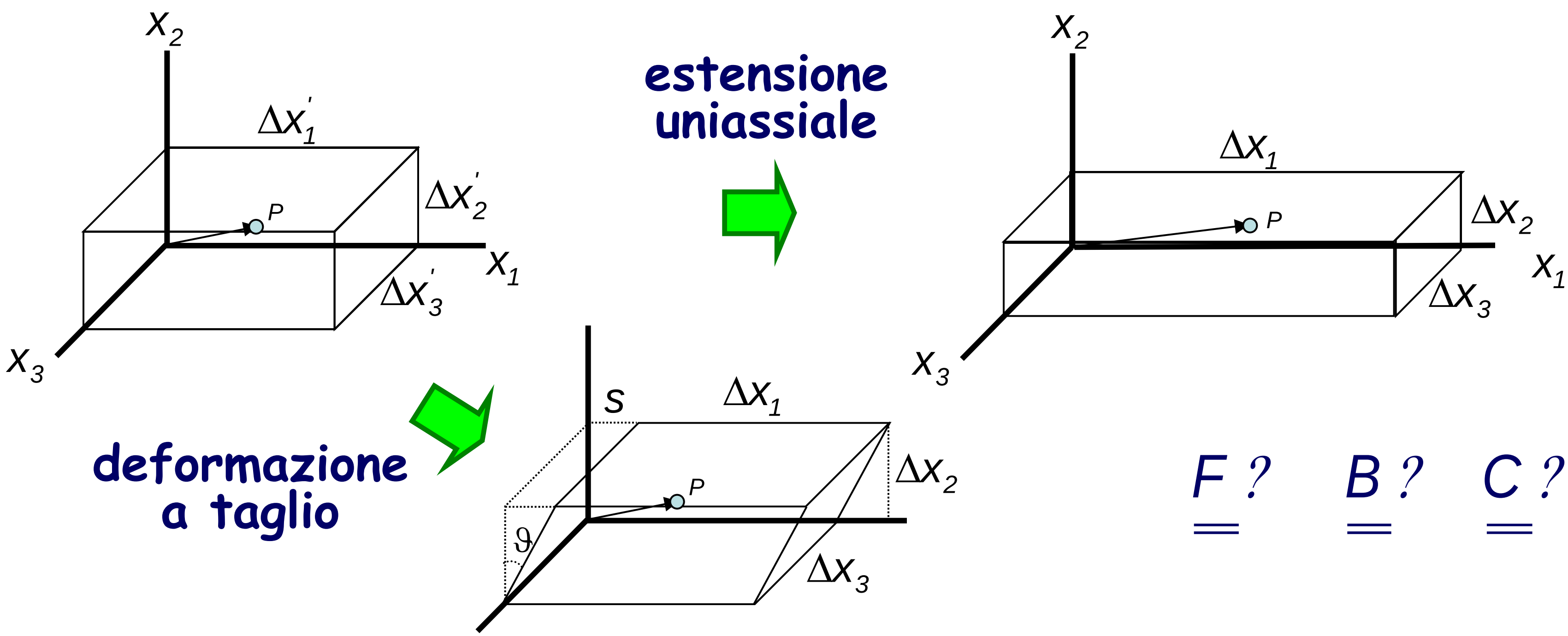
Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Università di Trieste

Tensore di Finger

Il tensore di Finger è una misura del cambiamento locale di area che accompagna la deformazione

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}} \bullet \underline{\underline{F}}^T \qquad B_{ij} = \sum_k F_{ik} F_{jk} = \sum_k \frac{\partial r_i}{\partial x_k} \frac{\partial r_j}{\partial x_k}$$

analisi di deformazioni estensionali e di taglio



estensione uniassiale

$$\Delta x_1 = \alpha_1 \Delta x_1' \qquad \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 = \Delta x_1' \Delta x_2' \Delta x_3'$$

$$\Delta x_2 = \alpha_2 \Delta x_2' \qquad \alpha_2 = \alpha_3 \qquad \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 1$$

$$\Delta x_3 = \alpha_3 \Delta x_3'$$

$$\alpha_1 \alpha_2^{\,2} = 1 \qquad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} = \alpha_3$$

$$\underline{\underline{F}} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{vmatrix} \qquad \underline{\underline{F}} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{\alpha_1} \end{vmatrix} = \underline{\underline{F}}^T$$

deformazione a taglio

$$\underline{\underline{F}} = \begin{vmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \gamma = \frac{s}{\Delta x_2} = tg\,\delta$$

estensione uniassiale

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}} \bullet \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^2 = \begin{vmatrix} \alpha_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\alpha_1 \end{vmatrix}$$

deformazione a taglio

$$\underline{\underline{B}} = \begin{vmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

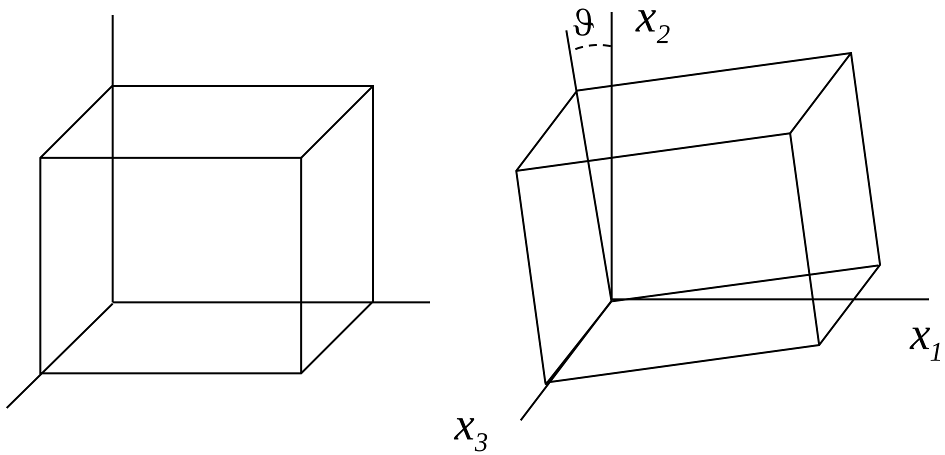
$$\underline{\underline{C}} = \begin{vmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1+\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

strain tensor

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{B}} - \underline{\underline{\delta}}$$

$$\underline{\underline{E}} = \begin{vmatrix} \alpha_1^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\alpha_1 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\alpha_1 - 1 \end{vmatrix} \qquad \underline{\underline{E}} = \begin{vmatrix} \gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

rotazione rigida



$$x_1 = x_1' \cos\vartheta - x_2' \sin\vartheta$$
$$x_2 = x_1' \sin\vartheta + x_2' \cos\vartheta$$
$$x_3 = x_3'$$

$$\underline{\underline{F}} = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$B_{11} = \sum_k F_{1k}F_{1k} = \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = 1$$
$$B_{12} = \sum_k F_{1k}F_{2k} = \sin\vartheta\cos\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta = 0$$

………

$$\underline{\underline{B}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \underline{\underline{C}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \underline{\underline{E}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Neo-Hookean model

$$\underline{\underline{\tau}} = G\underline{\underline{B}} \qquad \underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{\delta}} + G\underline{\underline{B}}$$

G modulo elastico di taglio

estensione uniassiale

$$\sigma_{11} = -p + G\alpha_1^{\ 2}$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = -p + \frac{G}{\alpha_1}$$

$$\sigma_{11} = \frac{f_1}{a_1} = \frac{f_1}{\Delta x_2 \Delta x_3}$$

f_1 forza di trazione

a_1 sezione del campione deformato

in assenza di forze di trazione sulle facce laterali:

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{G}{\alpha_1} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{11} = G\left(\alpha_1^{\ 2} - \frac{1}{\alpha_1}\right)$$

$$\Downarrow$$

riferendo f_1 alla sezione originaria:

$$V = a_1 \Delta x_1 = a_1^{'} \Delta x_1^{'} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{a_1^{'}}{\alpha_1} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{11} = \frac{f_1}{a_1^{'}} = G\left(\alpha_1 - \frac{1}{\alpha_1^{\ 2}}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_1^{'}} = \frac{L}{L^{'}} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{L - L'}{L'} = \alpha_1 - 1 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{11} = G\,\frac{3\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3}{1 + \varepsilon}$$

$$\varepsilon \to 0 \quad \Downarrow$$ piccole deformazioni

$$\sigma_{11} = 3G\,\varepsilon = E\,\varepsilon$$

per materiali isotropi comprimibili

$$E = 2G(\nu + 1)$$

ν rapporto di Poisson (0 ÷ 0.5)

deformazione di taglio

$$\sigma_{11} = -p + G(1 + \gamma^2)$$

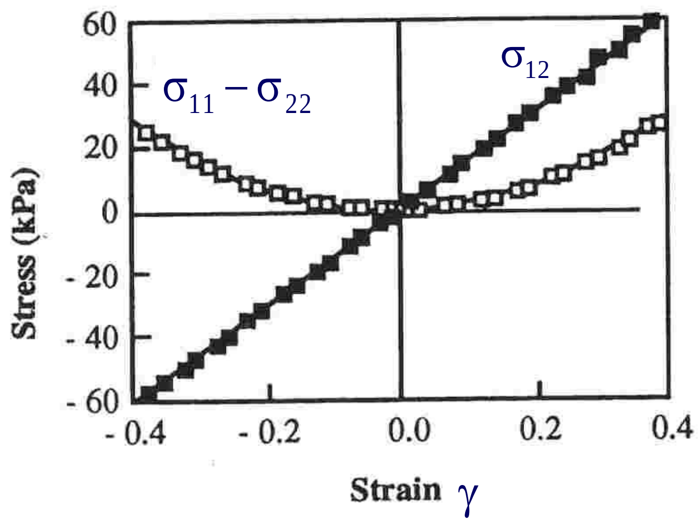
$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = -p + G$$

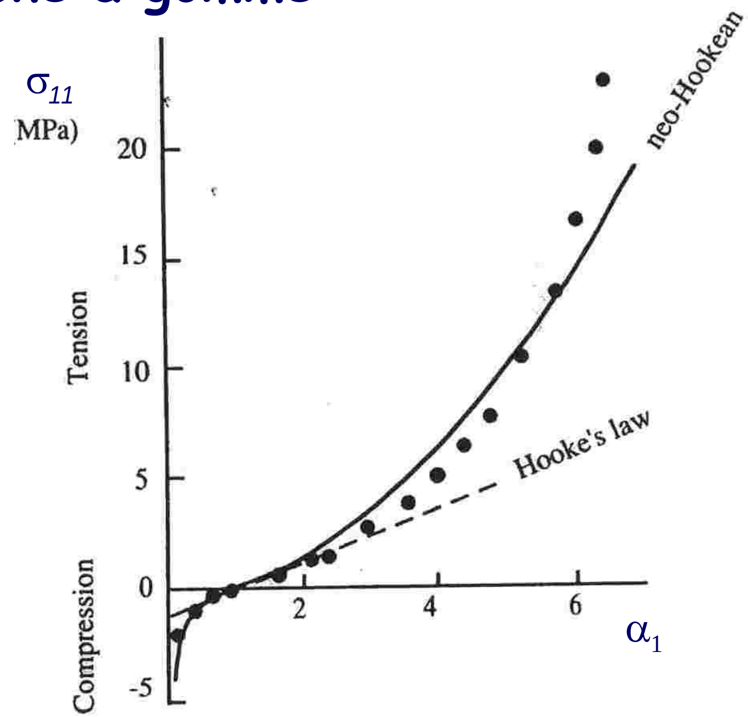
$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = G\gamma$$

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} = G\gamma^2$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{33} = 0$$

esempi di applicazione a gomme





Appendice

equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \underline{v}) \quad \xrightarrow{\rho \ \text{cost}} \quad \nabla \cdot \underline{v} = 0$$

per una funzione scalare f (x,y,z,t)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho f) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x f) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y f) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z f) = \rho\left(\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z}\right) +$$

$$\cancel{+ f\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right)} = \rho \frac{Df}{Dt}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho f) + \nabla \cdot (\rho \underline{v} f) = \rho \frac{Df}{Dt}}$$

per una funzione vettoriale $\vec{v}(x,y,z,t)$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v}) + [\nabla \cdot (\rho \underline{v}\,\underline{v})] = \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} \underline{v} + [(\cancel{\nabla \cdot \rho \underline{v}})\underline{v}] + [\rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v}] = \rho \frac{D\underline{v}}{Dt}$$

derivata sostanziale

$$\boxed{\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla f} \qquad \boxed{\frac{D\underline{v}}{Dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v}}$$

tensore velocità di deformazione $\underline{\underline{D}}$: derivazione dal tensore $\underline{\underline{C}}$

$$2D_{ij} = \left.\frac{dC_{ij}}{dt}\right|_{t'=t} \qquad C_{ij} = \sum_k F_{ki}F_{kj} = \sum_k \frac{\partial r_k}{\partial x_i}\frac{\partial r_k}{\partial x_j} \qquad \begin{array}{l} r_k = r_k(t') \\ r_k \neq x_k(t) \end{array}$$

$$\frac{dC_{ij}}{dt'} = \sum_k \frac{\partial r_k}{\partial x_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \sum_k \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\frac{\partial r_k}{\partial x_j}$$

$$\begin{array}{c} per\ t = t' \\ r_k = x_k \end{array} \qquad \left.\frac{dC_{ij}}{dt'}\right|_{t=t'} = \sum_k \delta_{ki}\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \sum_k \delta_{kj}\frac{\partial v_k}{\partial x_i}$$

$$\begin{array}{ll} per\ k = i & \delta_{ki} = 1 \\ per\ k \neq i & \delta_{ki} = 0 \end{array} \qquad \left.\frac{dC_{ij}}{dt'}\right|_{t=t'} = 2D_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

$$2\underline{\underline{D}} = \nabla\underline{v} + \nabla\underline{v}^T$$