Grandezze significative (dinamiche e cinematiche)

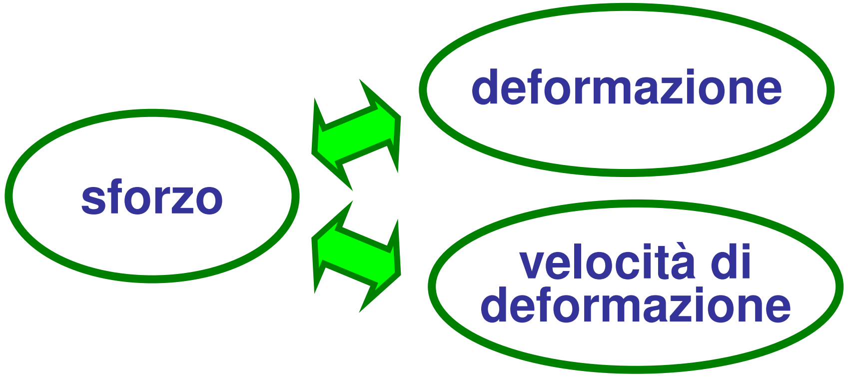
Romano Lapasin

DMRN - Università di Trieste

Obiettivo generale

definire un'equazione costitutiva adatta a descrivere
il comportamento meccanico del sistema materiale
in una qualunque condizione di campo

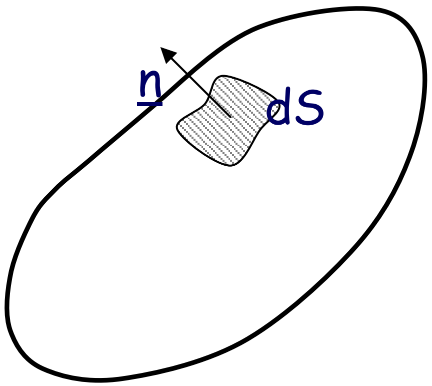
legame tra sforzi interni e stato di deformazione
e/o condizioni di flusso in ogni punto del sistema



dall'equazione costitutiva si ricavano le funzioni materiali
e i parametri materiali utili a definire le risposte
in semplici condizioni di deformazione o di flusso

Equazioni di variazione

bilancio di materia



$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \, dV = -\int_S [\underline{n} \bullet \rho \underline{v}] \, dS$$

accumulo termine convettivo

$$\int_V \frac{d}{dt} \rho \, dV = -\int_V [\underline{\nabla} \bullet \rho \underline{v}] \, dV$$

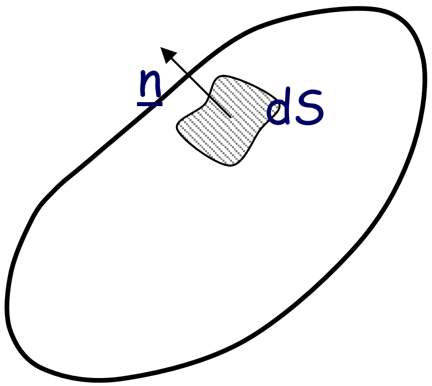
$$\frac{d}{dt}\rho = -\underline{\nabla} \bullet \rho \underline{v}$$

per fluidi incomprimibili $\underline{\nabla} \bullet \underline{v} = 0$

vincolo su componenti del gradiente di velocità $$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Equazione del moto ed equazione costitutiva

dal bilancio di quantità di moto



$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\,\underline{v}\,dV = -\int_S [\underline{n}\bullet\rho\,\underline{v}\,\underline{v}]\,dS - \int_S [\underline{n}\bullet\underline{\underline{\sigma}}]\,dS + \int_V \rho\,g\,dV$$

accumulo — termine convettivo — termine diffusivo — forze di volume

$$\int_V \frac{d}{dt}\rho\,\underline{v}\,dV = -\int_V [\underline{\nabla}\bullet\rho\,\underline{v}\,\underline{v}]\,dV - \int_V [\underline{\nabla}\bullet\underline{\underline{\sigma}}]\,dV + \int_V \rho\,g\,dV$$

$$\frac{d}{dt}\rho\,\underline{v} = -\underline{\nabla}\bullet\rho\,\underline{v}\,\underline{v} - \underline{\nabla}\bullet\underline{\underline{\sigma}} + \rho\,g$$

equazione del moto

$$\rho\frac{D\underline{v}}{Dt} = -\underline{\nabla}\bullet\underline{\underline{\sigma}} + \rho\,g$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\tau}}$$

equazione costitutiva per necessaria per la risoluzione $\underline{v}(x_i)$

Equazione costitutiva ed equazione del moto

equazione costitutiva: legge di Newton

$$\boxed{\underline{\underline{\tau}} = \mu\left(\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T\right)} - \left(\frac{2}{3}\mu - \kappa\right)\left(\nabla \bullet \underline{v}\right)\underline{\underline{\delta}}$$

$$\Downarrow$$

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{v} + \rho\, \underline{g}$$

equazione del moto di Navier-Stokes

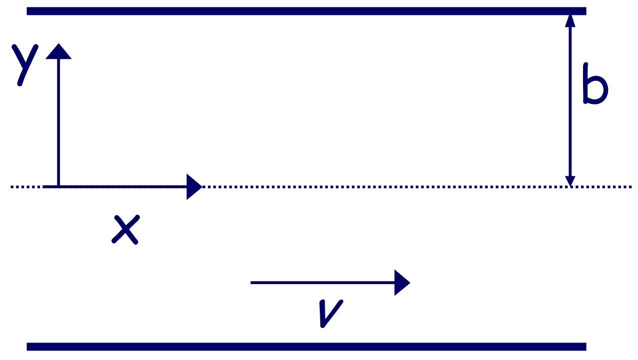
altra equazione costitutiva (fluidi non Newtoniani)

$$\Downarrow$$

equazione del moto equivalente a Navier-Stokes

Flusso di un liquido Newtoniano tra piani paralleli in stato stazionario

piani infinitamente estesi, orizzontali
liquido incomprimibile
pressione applicata (gradiente secondo x)



$$0=-\nabla p+\mu\nabla^2\underline{v}$$

soluzione postulata:

$$v_z=0 \quad v_y=0 \quad v_x=v_x(y)$$

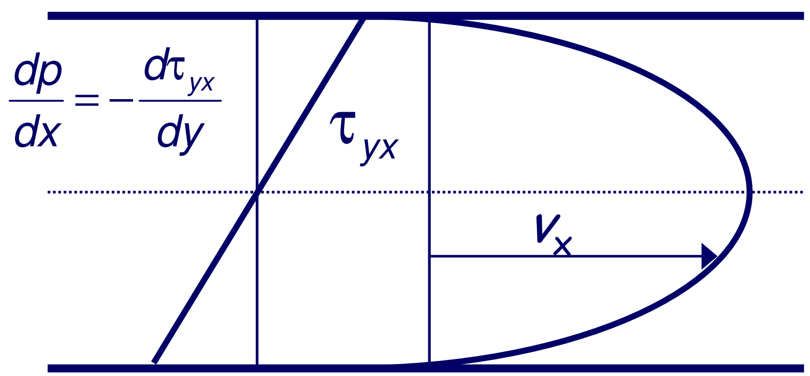
dalla componente del equazione del moto secondo x:

$$\mu\frac{d^2v_x}{dy^2}=\frac{dp}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_x}{dy}=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}x+C_1 \quad \Rightarrow \quad v_x=\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}x^2+C_1x+C_2$$

dalle condizioni al contorno ($v_x=0 \quad per\ y=b,\ y=-b$)

$$v_x=\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(x^2-b^2\right)$$

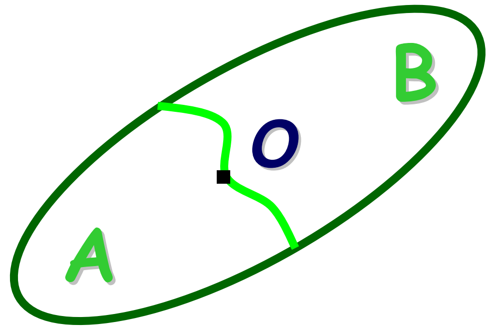
$$Q=W\int_{-b}^{b}v_x dy=\frac{2}{3\mu}\frac{dp}{dx}b^3$$

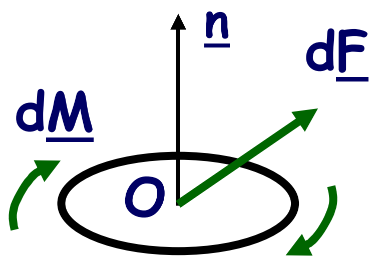


versante dinamico

stato di tensione nel punto O

divisione del corpo in due parti secondo una superficie passante per O (normale $\underline{n}$)





interazioni tra le due parti A e B espresse attraverso d$\underline{F}$ e d$\underline{M}$

$$\frac{d\underline{M}}{dA} \xrightarrow[dA \to 0]{} 0 \qquad \frac{d\underline{F}}{dA} \xrightarrow[dA \to 0]{} \underline{t}$$

tensione $\underline{t} = f(O, \underline{n})$

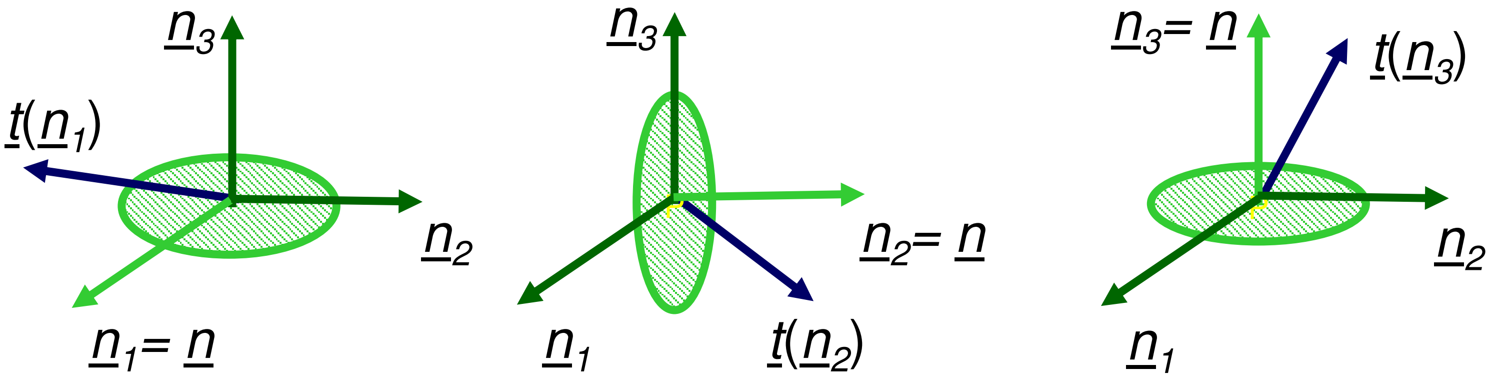
tensione in O
in condizione idrostatica

$$\underline{t} = -p\underline{n}$$

versante dinamico
dalla tensione al tensore degli sforzi

la tensione relativa alla generica normale n può essere definita a partire da quelle relative a tre direzioni

$$\underline{t}(\underline{n}_1) = t_1(\underline{n}_1)\,\underline{n}_1 + t_2(\underline{n}_1)\,\underline{n}_2 + t_3(\underline{n}_1)\,\underline{n}_3$$
$$\underline{t}(\underline{n}_2) = t_1(\underline{n}_2)\,\underline{n}_1 + t_2(\underline{n}_2)\,\underline{n}_2 + t_3(\underline{n}_2)\,\underline{n}_3$$
$$\underline{t}(\underline{n}_3) = t_1(\underline{n}_3)\,\underline{n}_1 + t_2(\underline{n}_3)\,\underline{n}_2 + t_3(\underline{n}_3)\,\underline{n}_3$$



$\underline{t}(\underline{n}_1),\ \underline{t}(\underline{n}_2),\ \underline{t}(\underline{n}_3)$ ➡ **tensore degli sforzi**

versante dinamico

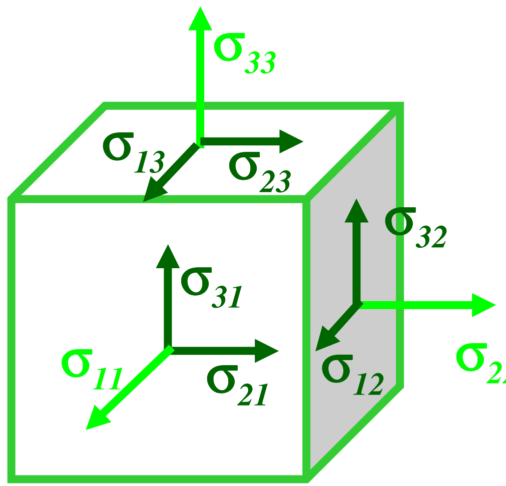
dal tensore degli sforzi alla tensione in un punto

componente della tensione ⇨ componente del tensore degli sforzi

$$t_j(\underline{n}_i) = \sigma_{ji} \qquad i, j = 1,2,3$$

tensore (totale) degli sforzi

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$



σ_{ji} $(j = i)$: sforzi normali
σ_{ji} $(j \neq i)$: sforzi tangenziali

la tensione nel punto O: $\underline{t} = f(O, \underline{n}) = \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}(O)$

versante dinamico

tensore deviatorico degli sforzi t

da condizione idrostatica a condizioni di flusso/deformazioni

$$\underline{t} = -p\underline{n} \quad \Rightarrow \quad \underline{t} = \underline{n} \bullet \underline{\underline{\sigma}}$$

il contributo (extra) delle condizioni di flusso/deformazioni allo stato di tensione è espresso dal tensore deviatorico $\underline{\underline{\tau}}$

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\tau}}$$

tensore deviatorico degli sforzi (extra stress tensor)

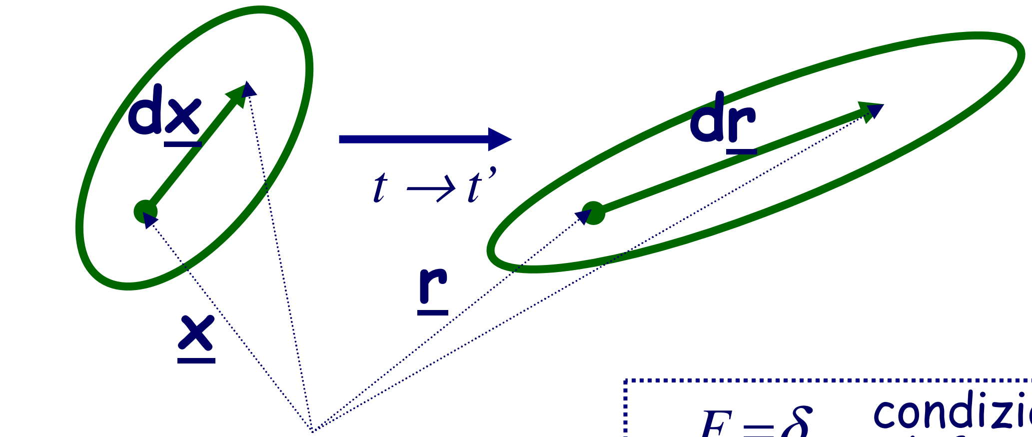
$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} + p & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} + p & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} + p \end{vmatrix}$$

$\underline{\underline{\tau}}$ **è un tensore simmetrico**

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

versante cinematico

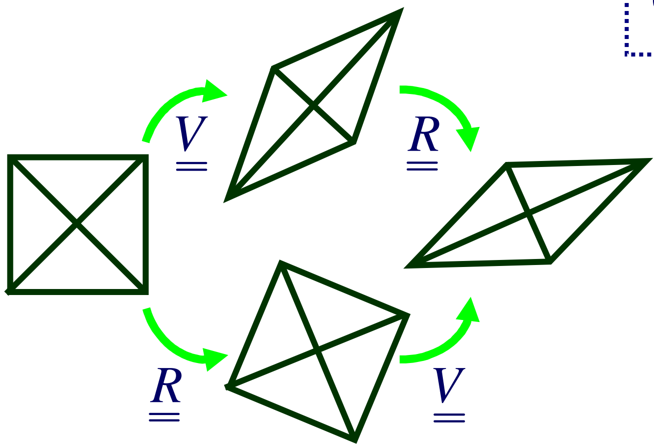
cambiamento della configurazione nel tempo (da t a t')



$$d\underline{r} = \underline{\underline{F}}\, d\underline{x} \qquad F_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial x_j}$$

$\underline{\underline{F}}$: **tensore gradiente di deformazione**

$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\delta}}$ condizione indeformata $\det \underline{\underline{F}} = 1$ rotazione	⇨	necessità di separare deformazione da moto di corpo rigido



$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{V}} \bullet \underline{\underline{R}}$ (deformazione • rotazione)

misura della <u>sola</u> deformazione attraverso:

tensore di Cauchy-Green $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \bullet \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{V}}^2$

tensore di Finger $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}} \bullet \underline{\underline{F}}^T$

………………

grandezze cinematiche e equazioni costitutive

tensore di Cauchy-Green, di Finger ed altri correlati utili per la descrizione del comportamento di solidi elastici

(esiste una configurazione di riferimento)

Solidi elastici

Lo sforzo è funzione univoca del tensore di Cauchy-Green misurato a partire dalla configurazione di riferimento

$$\underline{\underline{\tau}} = \Im(\underline{\underline{C}})$$

elasticità lineare ($per\ \underline{\underline{C}} \to 0$): $\Im(\underline{\underline{C}}) \to E\underline{\underline{C}}$

in assenza di una configurazione di riferimento

⇓

necessità di altri tensori
per la descrizione del comportamento di fluidi viscosi

versante cinematico

tensore velocità di deformazione $\underline{\underline{D}}$
per la descrizione del comportamento di fluidi viscosi

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}\left(\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T\right) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T\right)$$

(Bird's school)

$$\underline{\underline{\dot{\gamma}}} = \nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T = 2\underline{\underline{D}}$$

rate of strain tensor → velocità di deformazione in un punto

$$\underline{\underline{\omega}} = \nabla \underline{v} - (\nabla \underline{v})^T$$

vorticity tensor → velocità di rotazione in un punto

$\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$ ($\underline{\underline{D}}$) : tensore simmetrico → 2° invariante: grandezza scalare utile a caratterizzare l'intensità del moto

$$\mathrm{II}_{\dot{\gamma}} = \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}\dot{\gamma}_{ji} \longrightarrow \dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{II}_{\dot{\gamma}}}$$

grandezze cinematiche e equazioni costitutive

il tensore velocità di deformazione $\underline{\underline{D}}$ ($\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$) serve alla descrizione del comportamento di fluidi viscosi

(non esiste una configurazione di riferimento)

Fluidi viscosi

Lo sforzo è funzione univoca del tensore $\underline{\underline{D}}$ valutato al tempo corrente

$$\underline{\underline{\tau}} = \Im(\underline{\underline{D}})$$

Fluido Newtoniano

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\mu \underline{\underline{D}} \qquad (\underline{\underline{\tau}} = -\mu \underline{\underline{\dot{\gamma}}})$$

Fluido Euleriano

$$\underline{\underline{\tau}} = 0 \quad (\mu = 0)$$

Fluido Newtoniano generalizzato

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\eta(II_D)\underline{\underline{D}} \qquad (\underline{\underline{\tau}} = -\eta(\dot{\gamma})\underline{\underline{\dot{\gamma}}})$$

grandezze cinematiche e equazioni costitutive

il tensore di Cauchy $\underline{\underline{C}}$ (funzione del tempo) serve alla descrizione del comportamento di sistemi viscoelastici

(non esiste una configurazione di riferimento)

Corpi viscoelastici

Lo sforzo è determinato in maniera univoca dal tensore di Cauchy $\underline{\underline{C}}$ il cui valore dipende dal tempo

$$\underline{\underline{\tau}}(t) = \Im(\underline{\underline{C}}(t'))$$

ed è computato fino al tempo corrente t per tener conto della storia di deformazione precedente

(il funzionale $\Im$ è, di norma, espresso da un'integrale)

grandezze cinematiche e equazioni costitutive

Comportamento viscoelastico lineare (in condizioni di piccole deformazioni)

$$\underline{\underline{\tau}}(t) = \int_{-\infty}^{t} E(t')\,\underline{\underline{C}}(t')\,dt'$$

$$E(t') = E\,f(t-t')$$

$$f(t-t') = \int_{0}^{\infty} a(\lambda)\exp\left[-\frac{t-t'}{\lambda}\right]d\lambda$$

$$\underline{\underline{\tau}}(t) = \int_{-\infty}^{t} E\left(\int_{0}^{\infty} a(\lambda)\exp\left[-\frac{t-t'}{\lambda}\right]d\lambda\right)C(t')\,dt'$$

equazione costitutiva della viscoelasticità lineare

grandezze cinematiche e equazioni costitutive

altre espressioni del modello viscoelastico lineare in forma generalizzata

$$\underline{\underline{\sigma}} = -\int_{-\infty}^{t} G(t-t')\,\underline{\underline{\dot{\gamma}}}(t')\,dt'$$

$G(t\text{-}t')$ modulo di rilassamento (*relaxation modulus*)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \int_{-\infty}^{t} M(t-t')\,\underline{\underline{\gamma}}(t')\,dt'$$

$M(t\text{-}t')$ funzione di memoria (*memory function*)

$$M(t) = -\frac{d\,G(t)}{d\,t}$$

equazioni costitutive
principi generali per la loro definizione

1. Principio di oggettività materiale

   uso di grandezze significative per caratterizzare
   lo stato di tensione e di deformazione
   indifferenti a traslazioni, rotazioni e al sistema
   di riferimento

2. Principio deterministico

   Il tensore degli sforzi dipende dalla storia reologica
   (stati di deformazione precedenti e presente)

3. Principio di azione locale

   Il tensore degli sforzi in un punto dipende dalle forze
   agenti nell'intorno del punto

Appendice

equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \underline{v}) \quad \xrightarrow{\rho\ \text{cost}} \quad \nabla \cdot \underline{v} = 0$$

per una funzione scalare f (x,y,z,t)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathrm{f}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x \mathrm{f}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y \mathrm{f}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z \mathrm{f}) = \rho \left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial z} \right) +$$

$$+ \mathrm{f} \cancel{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} \right)} = \rho \frac{\mathrm{Df}}{\mathrm{D}t}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathrm{f}) + \nabla \cdot (\rho \underline{v} \mathrm{f}) = \rho \frac{\mathrm{Df}}{\mathrm{D}t}}$$

per una funzione vettoriale $\vec{v}(x,y,z,t)$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v}) + [\nabla \cdot (\rho \underline{v}\, \underline{v})] = \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} \underline{v} + [\cancel{(\nabla \cdot \rho \underline{v})} \underline{v}] + [\rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v}] = \rho \frac{\mathrm{D}\underline{v}}{\mathrm{D}t}$$

derivata sostanziale

$$\boxed{\frac{\mathrm{Df}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \mathrm{f}} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{D}\underline{v}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v}}$$

tensore velocità di deformazione $\underline{\underline{D}}$: derivazione dal tensore $\underline{\underline{C}}$

$$2D_{ij} = \left.\frac{dC_{ij}}{dt}\right|_{t'=t} \qquad C_{ij} = \sum_k F_{ki} F_{kj} = \sum_k \frac{\partial r_k}{\partial x_i}\frac{\partial r_k}{\partial x_j} \qquad \begin{array}{l} r_k = r_k(t') \\ r_k \neq x_k(t) \end{array}$$

$$\frac{dC_{ij}}{dt'} = \sum_k \frac{\partial r_k}{\partial x_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \sum_k \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\frac{\partial r_k}{\partial x_j}$$

$$\begin{array}{l} per\ t = t' \\ r_k = x_k \end{array} \qquad \left.\frac{dC_{ij}}{dt'}\right|_{t=t'} = \sum_k \delta_{ki}\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \sum_k \delta_{kj}\frac{\partial v_k}{\partial x_i}$$

$$\begin{array}{ll} per\ k = i & \delta_{ki} = 1 \\ per\ k \neq i & \delta_{ki} = 0 \end{array} \qquad \left.\frac{dC_{ij}}{dt'}\right|_{t=t'} = 2D_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

$$2\underline{\underline{D}} = \nabla \underline{v} + \nabla \underline{v}^T$$