EQUAZIONI DI VARIAZIONE - FORMA ADIMENSIONALE

(analisi limitata a sistemi aventi densità e viscosità costanti)

Individuazione di grandezze caratteristiche
(dimensione D, velocità V, pressione di riferimento p_o,
temperatura T_1- T_0,concentrazione c_0)

$$v^* = \frac{v}{V} \qquad p^* = \frac{p - p_0}{\rho V^2} \qquad t^* = \frac{tV}{D}$$

$$x^* = \frac{x}{D} \qquad y^* = \frac{y}{D} \qquad z^* = \frac{z}{D}$$

$$\nabla^* = D\nabla = \bar{\delta}_1 \frac{\partial}{\partial x^*} + \bar{\delta}_2 \frac{\partial}{\partial y^*} + \bar{\delta}_3 \frac{\partial}{\partial z^*}$$

$$\nabla^{*2} = D^2\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}}$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t^*} = \frac{D}{V}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$$

$$(\nabla \bullet \bar{v}) = 0 \longrightarrow (\frac{1}{D}\nabla^* \bullet \bar{v}^* V) = 0 \longrightarrow \boxed{(\nabla^* \bullet \bar{v}^*) = 0}$$

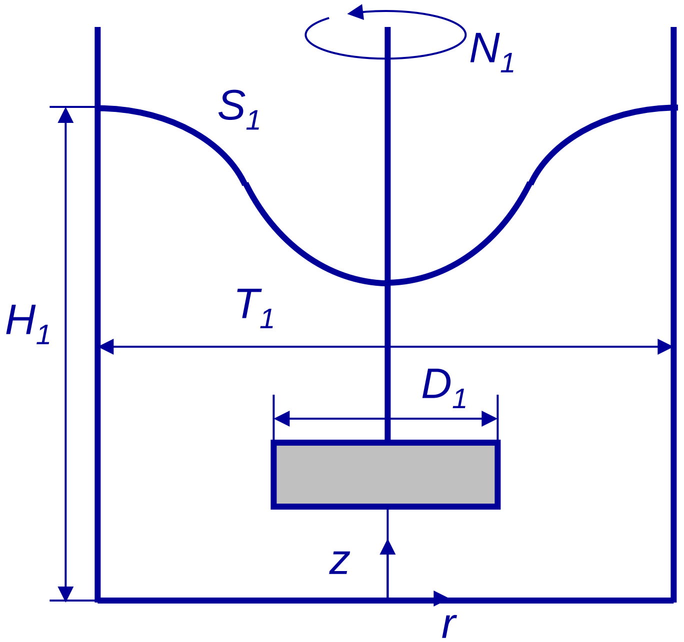
$$\rho \frac{\mathrm{D}\bar{\mathrm{v}}}{\mathrm{D\,t}} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \bar{v} + \rho\,\bar{g}$$

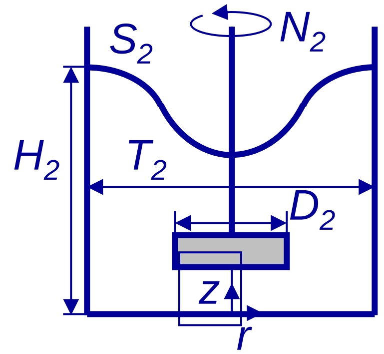
$$\rho \frac{V}{D}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t^*}\left(\bar{v}^* V\right) = -\left(\frac{1}{D}\nabla^*(p^* \rho V^2)\right) + \mu \frac{1}{D^2}\nabla^{*2}\left(\bar{v}^* V\right) + \rho\,\bar{g}$$

$$\frac{\mathrm{D}\bar{v}^*}{\mathrm{D}\,t^*} = -\nabla^* p^* + \frac{\mu}{DV\rho}\nabla^{*2}\bar{v}^* + \frac{gD}{V^2}\frac{\bar{g}}{g}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}\bar{v}^*}{\mathrm{D}\,t^*} = -\nabla^* p^* + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^{*2}\bar{v}^* + \frac{1}{\mathrm{Fr}}\frac{\bar{g}}{g}}$$

(recipiente agitato)





superfici libere e linee di flusso simili
per caratteristiche geometriche simili e
per soluzioni eguali dalle equazioni di variazione
(in forma adimensionale)

↓

condizioni al contorno eguali (in forma adimensionali)
e numeri caratteristici eguali

grandezze caratteristiche: D_1, D_2, $D_1 N_1$, $D_2 N_2$

$$v^* = 0 \quad per \quad z^* = 0 \quad per \quad 0 < r^* < \frac{T_1}{2D_1} \qquad\qquad v^* = 0 \quad per \quad z^* = 0 \quad per \quad 0 < r^* < \frac{T_2}{2D_2}$$

$$v^* = 0 \quad per \quad r^* = \frac{T_1}{2D_1} \quad per \quad 0 < z^* < \frac{H_1}{D_1} \qquad\qquad v^* = 0 \quad per \quad r^* = \frac{T_2}{2D_2} \quad per \quad 0 < z^* < \frac{H_2}{D_2}$$

$$p^* = 0 \quad per \quad S_1^*\left(\frac{r}{D_1}, \frac{z}{D_1}\right) \qquad\qquad p^* = 0 \quad per \quad S_2^*\left(\frac{r}{D_2}, \frac{z}{D_2}\right)$$

EQUAZIONI DI VARIAZIONE – SCALE UP

condizioni da soddisfare

condizioni geometriche

$$\frac{T_1}{D_1} = \frac{T_2}{D_2} \qquad \frac{H_1}{D_1} = \frac{H_2}{D_2}$$

$$S_1^*\left(\frac{r}{D_1}, \frac{z}{D_1}\right) = S_2^*\left(\frac{r}{D_2}, \frac{z}{D_2}\right)$$

condizioni dinamiche

$$\frac{D_1^{\,2} N_1 \rho_1}{\mu_1} = \frac{D_2^{\,2} N_2 \rho_2}{\mu_2}$$

$$\frac{D_1 N_1^{\,2}}{g} = \frac{D_2 N_2^{\,2}}{g}$$

$$\frac{N_2}{N_1} = \sqrt{\frac{D_1}{D_2}}$$

$$\frac{\mu_2}{\rho_2} = \frac{\mu_1}{\rho_1}\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^{3/2}$$

Le condizioni di similitudine dinamica sono soddisfatte solo se le viscosità cinematiche sono differenti (il fluido nel serbatoio più piccolo deve avere una viscosità cinematica minore)

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_2 = \upsilon_1 \frac{1}{\sqrt{8}}$$

EQUAZIONI DI VARIAZIONE - FORMA ADIMENSIONALE

Sistemi non isotermi in condizioni di convezione forzata aggiunta dell'equazione dell'energia termica

$$\rho \frac{D\hat{U}}{Dt} = -(\nabla \bullet \bar{q}) - p(\nabla \bullet \bar{v}) - (\bar{\bar{\tau}} : \nabla \bar{v})$$

$$\rho \hat{c}_p \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T + \mu \Phi_v \qquad T^* = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}$$

$$\rho \hat{c}_p \frac{T_1 - T_0}{\frac{D}{V}} \frac{DT^*}{Dt^*} = k \frac{1}{D^2}(T_1 - T_0)\nabla^{*2} T^* + \mu \frac{V^2}{D^2} \Phi_v^*$$

$$\frac{DT^*}{Dt^*} = k \frac{1}{DV} \frac{1}{\rho \hat{c}_p} \nabla^{*2} T^* + \mu \frac{V}{D} \frac{1}{\rho \hat{c}_p} \frac{1}{T_1 - T_0} \Phi_v^*$$

$$\frac{DT^*}{Dt^*} = \frac{\mu}{D\rho V} \frac{k}{\hat{c}_p \mu} \nabla^{*2} T^* + \frac{\mu}{D\rho V} \frac{k}{\hat{c}_p \mu} \frac{\mu V^2}{k(T_1 - T_0)} \Phi_v^*$$

$$\boxed{\frac{DT^*}{Dt^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}} \nabla^{*2} T^* + \frac{\mathrm{Br}}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}} \Phi_v^*}$$

$$\boxed{\frac{D\bar{v}^*}{Dt^*} = -\nabla^* p^* + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^{*2} \bar{v}^* + \frac{1}{\mathrm{Fr}} \frac{\bar{g}}{g}}$$

$$\boxed{(\nabla^* \bullet \bar{v}^*) = 0}$$

dalle equazioni di variazione in convezione forzata risultano I seguenti numeri caratteristici:

Re, Pr, Br, Fr

EQUAZIONI DI VARIAZIONE - FORMA ADIMENSIONALE

Sistemi non isotermi in condizioni di convezione naturale

equazione del moto

$$\rho \frac{\mathrm{D}\bar{v}}{\mathrm{D}t} = \mu \nabla^2 \bar{v} - \rho \beta \bar{g}\,(T - T_0)$$

$$v^{**} = \frac{v D \rho}{\mu} \qquad t^{**} = \frac{t\,\mu}{\rho D^2}$$

$$\rho \frac{\mu}{\rho D} \frac{\mu}{\rho D^2} \frac{\mathrm{D}\bar{v}^{**}}{\mathrm{D}t^{**}} = \mu \frac{1}{D^2} \frac{\mu}{D\rho} \nabla^{*2} \bar{v}^{**} - \rho\beta \frac{\bar{g}}{g} g\,(T_1 - T_0) T^*$$

$$\frac{\mathrm{D}\bar{v}^{**}}{\mathrm{D}t^{**}} = \nabla^{*2} \bar{v}^{**} - \frac{\rho D^3}{\mu^2} \rho\beta \frac{\bar{g}}{g} g\,(T_1 - T_0) T^*$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}\bar{v}^{**}}{\mathrm{D}t^{**}} = \nabla^{*2} \bar{v}^{**} - T^* \mathrm{Gr} \frac{\bar{g}}{g}} \qquad \mathrm{Gr} = \frac{\rho^2 \beta g\,(T_1 - T_0) D^3}{\mu^2}$$

equazione dell'energia

$$\rho \hat{c}_p \frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} = k \nabla^2 T$$

$$\rho \hat{c}_p (T_1 - T_0) \frac{\mu}{\rho D^2} \frac{\mathrm{D}T^*}{\mathrm{D}t^{**}} = k \frac{1}{D^2} (T_1 - T_0) \nabla^{*2} T^*$$

$$\boxed{\frac{DT^*}{Dt^{**}} = \frac{1}{\mathrm{Pr}} \nabla^{*2} T^*}$$

equazione di continuità $\boxed{(\nabla^* \cdot \bar{\mathrm{v}}^{**}) = 0}$

dalle equazioni di variazione in convezione naturale risultano I seguenti numeri caratteristici:

Gr, Pr

EQUAZIONE DELL'ENERGIA : FORME ESPLICITE

$$\boxed{\rho\frac{D\hat{U}}{Dt} = -(\nabla\bullet\bar{q}) - p(\nabla\bullet\bar{v}) - (\bar{\bar{\tau}}:\nabla\bar{v})}$$

$$d\hat{U} = \left(\frac{\partial\hat{U}}{\partial\hat{V}}\right)_T d\hat{V} + \left(\frac{\partial\hat{U}}{\partial T}\right)_{\hat{V}} dT = \left(-p + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{V}}\right) d\hat{V} + \hat{c}_V\, dT$$

$$\rho\frac{D\hat{U}}{Dt} = \rho\left(-p + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{V}}\right)\frac{D\hat{V}}{Dt} + \rho\hat{c}_V\frac{DT}{Dt}$$

$$\rho\frac{D\hat{V}}{Dt} = \rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = (\nabla\cdot\bar{v})$$

v. equazione di continuità

$$\boxed{\rho\hat{c}_V\frac{DT}{Dt} = -(\nabla\cdot\bar{q}) - T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{V}}(\nabla\cdot\bar{v}) - (\bar{\bar{\tau}}:\nabla\bar{v})}$$

per un fluido Newtoniano (e conducibilità termica costante)

$$\rho\hat{c}_V\frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T - T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{V}}(\nabla\cdot\bar{v}) + \mu\Phi_v$$

per un gas ideale (a conducibilità termica costante)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{V}} = \frac{p}{T} \qquad \rho\hat{c}_V\frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T - p(\nabla\cdot\bar{v})$$

per un fluido incomprimibile (a conducibilità termica costante)

$$d\hat{U} = -p\, d\hat{V} + \hat{c}_p\, dT \qquad \rho\hat{c}_p\frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T + \mu\Phi_v$$